

Braunschweiger Schriften zur Mechanik

Jens–Uwe Böhrnsen

Dynamisches Verhalten von Schüttgütern beim Entleeren aus Silos

Mechanik-Zentrum

Technische Universität Braunschweig

Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr. 45-2002

Dynamisches Verhalten von Schüttgütern beim Entleeren aus Silos

von

Jens–Uwe Böhrnsen

Institut für Angewandte Mechanik

Technische Universität Braunschweig

Herausgegeben vom Mechanik-Zentrum der
Technischen Universität Braunschweig

Schriftleiter: Prof. Dr. rer. nat. H. Antes

Institut für Angewandte Mechanik
Postfach 3329
38023 Braunschweig

Tel.: 0531 / 391-7101
Fax: 0531 / 391-5843

Vom Fachbereich für Bauingenieurwesen der Technischen Universität
Braunschweig genehmigte Dissertation

Tag der Einreichung: 12.12.2001
Tag der Prüfung: 08.02.2002

Berichter:

Prof. Dr. rer. nat. H. Antes
Prof. Dr.-Ing. G. Rombach

©Copyright 2002 J.-U. Böhrnsen, Braunschweig

BSM 45-2002
ISBN 3-920395-44-1

Alle Rechte, insbesondere der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Mit Genehmigung des Autors ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise zu
vervielfältigen.

Zusammenfassung

Beim Entleeren von Schüttgütern aus Silos treten dynamische Effekte, z. B. das Siloschlagen oder das Silobrummen, auf. Zum einen wird der Silo in seiner Eigenfrequenz zu Schwingungen angeregt und zum anderen schwingen Teile der Struktur, z. B. die Silowände. Man spricht vom Siloschlagen oder auch vom Silobeben bei Frequenzen im Bereich um 10Hz und vom Silobrummen bei hörbaren Frequenzen bis etwa 1500Hz. Diese Effekte können störend sein oder sich bei Anregung von Eigenfrequenzen des Silos oder Teilen der Struktur gefährdend auf die Konstruktion auswirken. Es gilt, die Entstehung dieser Effekte zu klären und Methoden zu finden, mit denen man diese Effekte vorhersagen und die störenden Auswirkungen vermeiden kann.

Ziel dieser Arbeit ist es, mit einem numerischen Modell die dynamischen Vorgänge und das Fließprofil beim Entleeren von Silos zu simulieren. Unter Verwendung eines hypoplastischen Stoffmodells mit einer Erweiterung für viskoses Materialverhalten kann mit der FINITE-ELEMENT-METHODE die Entleerung von Silos über einen Zeitraum von mehreren Sekunden gerechnet werden. Es werden die toten Zonen in Kernflusssilos, die Spannungszustände im Schüttgut und das dilatante Materialverhalten berechnet. Die Interaktion des Schüttgutes und der elastischen Silowand werden berücksichtigt.

Zur Verifikation der Ergebnisse der Simulation werden Ergebnisse aus Experimenten herangezogen, die parallel zu dieser Arbeit am Institut für Mechanische Verfahrenstechnik an Großmodellsilos durchgeführt wurden.

Abstract

During the silo discharge with bulk solids, dynamic effects occur. The silo structure is excited to vibrations. Dependent on the actual frequencies, the vibrations are called silo music or silo quake. Moreover, if the frequency of excited vibrations is near to one of the eigenfrequencies of the silo or of structure parts as the silo walls, these effects are not only disturbing but may become even dangerous. Hence, it is important to clarify the formation of these effects and to find methods to predict and to prevent them.

The main focus of this work is the numerical simulation of the dynamic effects and the flow profile of bulk solids during the discharge process. Applying a hypoplastic constitutive model with a new viscous extension, the silo discharge can be calculated over a period of a few seconds. The dead areas in funnel flow silos, the stress state of the bulk solids, and the dilatant behaviour are calculated. The interaction of the bulk solids with the elastic silo walls is taken into account.

The results of the numerical simulation are compared with experimental data which are found by simultaneous experiments at full scale silos, carried out at the Institute of Mechanical Process Engineering.

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einleitung	1
1.1	Experimentelle Forschung	3
1.2	Numerische Untersuchungen	5
1.3	Eigene Arbeit	9
2	Mechanische Grundbeziehungen	10
2.1	Bezugssystem	10
2.2	Dynamisches Gleichgewicht	12
2.3	Kontinuitätsgleichung	13
2.4	Kinematische Beziehungen	13
2.5	Spannungsrate	14
3	Stoffmodelle	15
3.1	Vorüberlegungen zu Stoffmodellen für Schüttgüter	15
3.1.1	Begriffe zur Beschreibung von Schüttgütern	15
3.1.2	Schüttgutzustände in Silos	16
3.2	Kontinuumbeschreibung	17
3.3	Übersicht der Stoffmodelle für Schüttgüter	19
3.3.1	Hyperelastizität	19
3.3.2	Hypoelastizität	19

3.3.3	Plastizitätstheorie	20
3.3.4	Endochrome Theorie	20
3.3.5	Hyperplastizität	21
3.3.6	<i>Stress Vertex</i> -Theory	21
3.3.7	Hypoplastizität	21
3.4	Verwendete hypoplastische Modelle	22
3.4.1	Modell nach Kolymbas 1989	23
3.4.2	Modell nach von Wolffersdorff 1996	24
3.4.3	Stoffparameter für das Modell von von Wolffersdorff 1996	27
3.5	Parameter der verwendeten Schüttgüter	37
3.6	Dynamische Erweiterung	37
3.6.1	Viskosität im Schüttgut	39
3.6.2	Fluidbeschreibung: Linearer und nichtlinearer Ansatz	41
3.6.3	Dichteabhängige Viskosität μ	43
4	Experimenteller Aufbau	44
4.1	Experimentalsilos	44
4.2	Messtechnik	45
5	Numerische Umsetzung	47
5.1	Aufstellen des Gleichungssystems	47
5.1.1	Zusammenstellung der Gleichungen	47
5.1.2	Integrale Darstellung	48
5.2	Lösen des Gleichungssystems mit der FEM	50

5.3	Massenerhaltung	54
5.4	Bestimmung der Stoffmatrix	55
5.5	Randbedingungen	57
5.5.1	Geschwindigkeit am Auslass	57
5.5.2	Wandelemente	60
6	Ergebnisse: Beobachtungen, Berechnungen und Messungen	63
6.1	Beobachtungen zum Siloschlagen	63
6.2	Vergleich der Stoffmodelle	64
6.3	Einfluss der dynamischen Stoffparameter	65
6.4	Einfluss der Schüttgutedichte	69
6.5	Switch	70
6.6	Geschwindigkeitsfelder: Simulation und Experiment	74
6.7	Schwingungen der Schüttgutsäule und Wandverformungen	77
6.8	Geschwindigkeitsentwicklung	81
6.9	Porenzahl und Dilatanz	83
6.10	Deviatorischer Anteil der Deformationsrate	84
7	Zusammenfassung und Ausblick	88
A	Nomenklatur und Matrixschreibweise	90
A.1	Symbole und Einheiten	90
A.2	Matrizenalgebra	91
A.2.1	Rechenregeln	91

A.2.2	Tensorenschreibweise für die FEM	92
A.3	Darstellung des Spannungszustandes	93
Literaturverzeichnis		94
Index		100

1 EINLEITUNG

Beim Entleeren von Silos wird die bewegte Schüttgutmasse zu einer vertikalen Schwingung angeregt. Es treten sowohl Schläge als auch niederfrequente Schwingungen auf, die als Siloschlagen oder Silobeben bezeichnet werden. Durch Interaktion von bewegtem Schüttgut und Silowand kann die Wand zu einer Schwingung angeregt werden. Die hierbei entstehenden Schwingungen liegen im hörbaren Bereich und man spricht von Silobrummen. Tejchman (1997) ordnet dem Silobrummen Frequenzen um 1500Hz zu. Das Silobrummen kann störend sein und das Silobeben kann sich gefährdend auf die Konstruktion auswirken. Es liegt im Interesse der Anlagenbetreiber, solche Einflüsse vorhersagbar zu machen und somit in eine Anlagenplanung einfließen lassen zu können. Die Entstehung dieser Phänomene wird im Rahmen dieser Arbeit untersucht.

Silos werden in Kernflusssilos und Massenflusssilos unterschieden. Die Einteilung ergibt sich aus dem jeweiligen Fließprofil eines Schüttgutes beim Entleeren aus einem Silo. In Bild 1.1-a ist Massenfluss dargestellt, die Bilder 1.1-b und -c zeigen unterschiedliche Kernflussprofile.

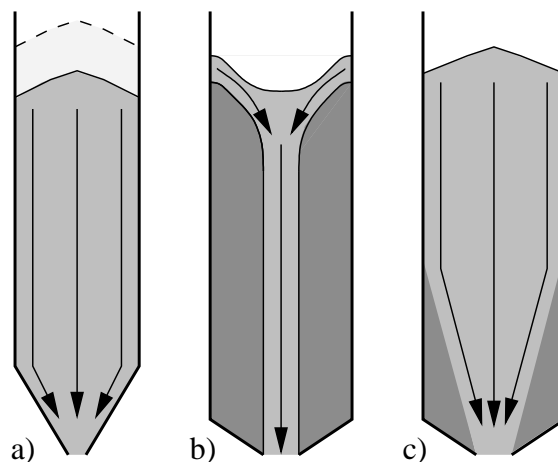


Bild 1.1: Massenfluss und Kernflusssilos: Unterschiedliche Fließprofile

Beim Massenflusssilo befindet sich die gesamte Schüttgutmasse in Bewegung, es wird ein *first-in-first-out* Prozess erreicht. Beim Kernflusssilo ist ein Teil der Schüttgutmasse nicht in Bewegung, was dazu führen kann, dass ein Teil des Schüttgutes gar nicht aus dem Silo ausfließt. Die Entstehung von Kern- oder Massenfluss ist von der Silogeometrie und dem verwendeten Schüttgut abhängig. Der Trichter eines Silos kann für das eine Schüttgut Massenfluss bewirken bei einem anderen Schüttgut kann Kernfluss auftreten. Die Einteilung in Kern- oder Massenfluss hängt also von der Trichterneigung und dem eingefüllten Schüttgut ab. Für die Berechnung von Kern- und Massenflusstrichtern gibt es zuverlässige Methoden.

Bei Kernflusssilos existieren sogenannte tote Zonen, in denen die Schüttgutmasse nicht in Bewegung ist, und es bilden sich Scherzonen am Übergang von ruhendem zu bewegtem Schüttgut. Dort ergibt sich auf Grund der Bewegungsrichtungsänderung des fließenden Schüttgutes ein Wandspannungsmaximum (Bild 1.2), dessen zeitliche Entwicklung beim Öffnen in dieser Arbeit untersucht wird.

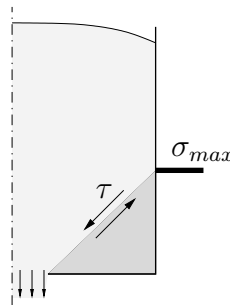


Bild 1.2: Kernflusssilo beim Entleeren: Tote Zone (dunkelgrau), Scherbereich mit Schubspannung τ und maximale Wandnormalspannung σ_{max}

Im Silo treten unterschiedliche Spannungszustände auf, wobei die Bemessung einer Silokonstruktion mit den bestehenden Normen auf den Füllzustand ausgelegt ist. Die beim Öffnen auftretenden dynamischen Lasten werden lediglich näherungsweise mit Faktoren erfasst.

Der Übergang vom Füll- in den Entleerungszustand hat eine Änderung des Spannungszustandes zur Folge, der mit Switch (*Umschalten*) bezeichnet wird. Der Füllzustand ist durch den aktiven Spannungszustand (Bild 1.3) gekennzeichnet. Hier sind die größten Hauptspannungstrajektorien aus der vertikalen Richtung (ungestörter Zustand) infolge der Wandreibung zur Wand hin geneigt. Nur die größte Hauptspannung in der Mittelachse des Silos ist vertikal ausgerichtet.

Beim Entleeren breitet sich vom Auslauf her beginnend ein sogenannter passiver Spannungszustand aus. Dieser Zustand ist durch gewölbeförmige Hauptspannungstrajektorien gekennzeichnet. Durch das ausfließende und sich auflockernde Material in den unteren Schichten entfällt deren stützende Wirkung. Die darüberliegenden Schüttgutschichten tragen die Last in die Wand ab. Dies geschieht gewölbeförmig; die größte Hauptspannung ist daher beim passiven Entleerungszustand in der Siloachse horizontal ausgerichtet (Bild 1.3).

Dem Switch wird besondere Bedeutung beigemessen, da es zu lokalen Spannungsspitzen in der Wand kommt. Der Switch tritt sowohl im Kern- als auch im Massenflusssilo auf. Es wird davon ausgegangen, dass die Spannungsspitze für die Bemessung des Silos relevant ist. Man spricht vom *Hochlaufen* des Switch, da sich die Änderung des Spannungszustandes und somit die Spannungsspitze von der Öffnung nach oben hin bewegt (Bild 1.3). Der passive Spannungszustand breitet sich im Trichter aus, während der aktive Spannungszustand im Schaft über einen langen Entleerungszeitraum erhalten bleibt. Im Schaft ist das Schüttgut in gleichförmiger Bewegung: man spricht vom Kolbenfluss oder auch Pfropfenfluss.

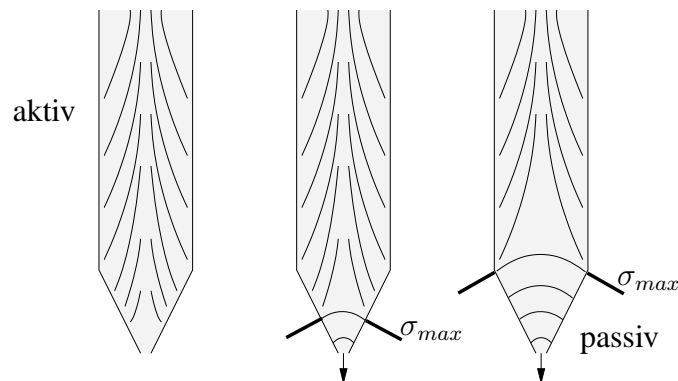


Bild 1.3: Hauptspannungstrajektorien beim beginnenden Entleeren: *Umschalten* zwischen aktivem und passivem Spannungszustand und *Hochlaufen* des Wandspannungsmaximums σ_{max}

1.1 Experimentelle Forschung

Untersuchungen an Silos und die schüttguttechnische Forschung haben eine lange Tradition. Die grundlegende Arbeit zur Dimensionierung von Silos ist von Janssen

(1895) veröffentlicht worden. Die Unterscheidung zwischen Füllzustand und Entleerungszustand trifft man seit der Arbeit von Jenike (1964). Das Fließverhalten von Schüttgütern wird hauptsächlich mit Scherversuchen ermittelt (siehe hierzu die Arbeiten von Schwedes (1968) und Schwedes, Schulze, Kwade und Heinrich (1998)).

Die Charakterisierung des Schüttgutverhaltens in Silos erfolgt im Experiment mittels Spannungsmessungen an den Silowänden. Mit fotografischen Momentaufnahmen durch transparente Silowände (Tejchman (1989) und Ostendorf, Theuerkauf und Schwedes (2000)) können Fließprofile aufgenommen werden. Röntgenstrahlen (Hoppe (1979) und Kahl (1976)) ermöglichen eine Untersuchung der Dichte im Schüttgut. Der Einfluss verschiedener Einbauten auf den Wandspannungszustand und die Einbautenlasten sowie auf das Fließprofil untersuchten unter anderem Strusch (1996) und Lyle (1991).

Die dynamischen Effekte des Silobrummens sind von Tejchman (1994) analysiert worden. Tejchman berichtet von guten Erfolgen beim Verringern der hörbaren Frequenzen in unterschiedlichen Silogeometrien durch Einbringen von Waffelblechen an der Silowand. Das Silobeben beim Entleeren eines Stahlsilos untersuchte Hardow (1998). Die Experimente an dem Stahlsilo des Siloprüfstandes Braunschweig zeigen, dass die unterschiedlichen Wandrauigkeiten keinen Einfluss auf das Schlagen des Silos haben. Es wird vermutet, dass das Silobrummen und das Schlagen des Silos von unterschiedlichen Vorgängen ausgelöst werden. Nach Tejchman haben die Wandrauigkeiten in bestimmten Höhenlagen des Siloschaftes einen Einfluss auf das Silobrummen, Hardow jedoch konnte keinen Einfluss der Wandrauigkeiten auf das Silobeben feststellen.

Auf der windabgewandten (lee) Seite von Sanddünen entstehen beim Abrutschen von Sandschollen Geräusche, die als *Singen* oder in manchen Fällen als *Dröhnen* wahrgenommen werden. Bagnold (1973) hat das 'Singen' der Dünen (*singing dunes*) mit Kornumlagerungen im besonders losen Gefüge des leeseitigen Dünenkörpers erklärt. In Analogie hierzu finden sich beim Entleeren von Silos Zustände sehr lockerer Kornpackungen. Es entstehen Zonen der Auflockerung und der Verdichtung. Je nach Geometrie und Imperfektion der Silokonstruktion entstehen beim Entleeren solche Bereiche an unterschiedlichen Positionen im Silo und verändern sich in Lage und Ausdehnung. Es bleibt zu untersuchen, ob oder in wie weit mit Hilfe der Theorie der Kornumlagerungen die Entstehung von Silobrummen geklärt werden kann.

1.2 Numerische Untersuchungen

Mit numerischer Simulation können die Vorgänge und Schüttgutzustände im Inneren des Silos untersucht werden. Dies ist eine wichtige Ergänzung zum Experiment, da es beispielsweise nicht möglich ist, im Inneren des Silos Spannungen zu messen. Die Bewegungs- und Spannungszustände im Siloinneren bleiben dem Experimentator weitestgehend verborgen. Numerische Untersuchungen ermitteln das Fließprofil, die Kräfte und Spannungen im gesamten Schüttgut.

Mit der Methode der **zellulären Automaten** wird der Speicherbereich und damit das Materialverhalten von Schüttgut abgebildet. Die Bewegungsrichtung der Partikeln wird durch ein hexagonales Gitter vorgegeben (siehe Bild 1.4). Die Netz-unabhängigkeit wird durch einen Geometriefaktor erreicht, der am Experiment kalibriert werden muss. Der Zustand der Partikeln kann in einem vierdimensionalen Zustandsraum mit der Energie, Winkelgeschwindigkeit, Geschwindigkeit und Orientierung der Partikeln beschrieben werden (Kaldenhoff (1998)).

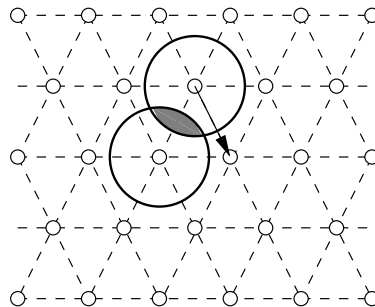


Bild 1.4: Zelluläre Automaten mit hexagonalem Gitter und virtuelle Überlappungsfläche von zwei benachbarten Partikeln

Aus der virtuellen Überlappungsfläche werden die Deformationen der Partikeln und somit die interpartikularen Kräfte berechnet. Nach der Iterationsuntersuchung, die für alle Partikeln einen möglichen neuen Zustand berechnet, werden die Partikeln in einem folgenden Schritt auf freie Gitterplätze *geshiftet* oder geben ihre Energie an benachbarte Partikeln ab. Die Methode zeigt jedoch Schwächen bei der Abbildung von unterschiedlichen Stoffen und Geometrien. Beispielhaft sei hier auf die Arbeit von Kaldenhoff (1998) verwiesen, in der die Netzabhängigkeit des Schüttwinkels und der Scherfläche gezeigt wird. Eine andere Beschreibung des Fließens von Schüttgut mit den zellulären Automaten ist in Kozicki und Tejchman (2001) zu finden. Hier werden die einzelnen Zellen in ihrem Füllzustand

beschrieben und die benachbarten Zellen füllen die Zelle nach einem vorgegeben Schema auf. Es wird festgelegt welche Zelle am Füllen beteiligt ist und welcher Anteil von der jeweiligen Zelle einfließen kann. In der Summe gleichen sich die über die Berandung der Zelle einfließenden und abfließenden Schüttgutanteile aus. Es können weder dynamische Vorgänge noch Spannungen ermittelt werden. Die Übertragung auf reale Stoffeigenschaften ist hier nicht möglich.

Mit der **DISKRETEN-ELEMENT-METHODE** (DEM) wird jede Partikel einzeln beschrieben. Je nach Ansatz werden dem Element Eigenschaften, wie u.a. Form, Elastizität und Reibung zugeschrieben. Versuche zur Bestimmung von Stoffparametern, die die mikroskopischen Effekte der Kornkontakte direkt beschreiben, sind nicht realisierbar. Die Korngröße von vielen Schüttgütern liegt im Bereich von Mikrons (10^{-6}m), so dass es unmöglich ist, diese Schüttgüter mit der DEM zu beschreiben. Die Methode kann Körner mit einem mittleren Korndurchmesser größer als etwa 1mm beschreiben. Jedoch ist die Partikelanzahl in einem Silo selbst bei Partikeldurchmessern im mm-Bereich um mehrere Größenordnungen höher als derzeit mit Hochleistungsrechnern simuliert werden könnte.

Die Partikelmethode zeigt mit wenigen Partikeln (derzeit etwa maximal 10^6 Partikeln) gute Ergebnisse für das Fließen und für das Verhalten beim Schüttkegelversuch. Hierbei müssen die Modellparameter an einem Versuch kalibriert werden, eine Übertragbarkeit auf andere Geometrien oder Randbedingungen ist nicht ohne weiteres möglich. Die Modellparameter beruhen nicht auf physikalischen Korneigenschaften, sondern werden derart gewählt, dass die Versuchsergebnisse gut angenähert werden. So ist die Kornsteifigkeit im Modell geringer als die Steifigkeit der Partikel selbst, da bei der Beschreibung der Kornkontakte mit der Methode der Überlappung der Einzelkörner und der Theorie der HERTZschen Pressung geringere Steifigkeiten zur Modellierung des tatsächlichen Materialverhaltens nötig sind. Dies bedeutet, dass Einflüsse wie die Kornform oder auch Kontaktvorgänge nur sehr ungenau angenähert werden. Es bedarf genauester Untersuchungen eines Schüttgutes für den jeweiligen Anwendungsfall, um die Stoffeigenschaften in Modellparameter umzusetzen. Die Übertragbarkeit des Partikelmodells auf einen allgemeinen Fall ist nicht möglich.

Die Methode kann helfen, die Eigenschaften von Kornstrukturen mit wenigen Partikeln zu studieren. Mit der DISKRETEN-ELEMENT-METHODE Simulation können beispielsweise Experimente in der Zweiachsalbox (Bild 3.5) nachgefahren und so die im Inneren der Probe auftretende Kräfte untersucht werden.

Jofriet (1997) wendet eine Kombination aus Kontinuummodell und diskreter Be-

schreibung bei der Entleerung eines Getreidesilos an. Hier werden kleinere Teilbereiche, wie der Übergang vom Schaft in den Trichter und der Auslaufbereich, mit diskreten Elementen beschrieben. Die übrigen Bereiche werden mit einem Kontinuummodell abgebildet. Die Koppelung der Teilbereiche erweist sich als schwierig und die Methode erfordert einen hohen Rechenaufwand. Arbeiten von Cundall und Strack (1979) und Herrmann und Luding (1998) zeigen Modellbeschreibungen und Anwendungsbeispiele mit begrenzter Partikelanzahl. Die Methode wird auf Grund des enormen Speicherplatzbedarfs für Siloanwendungen erst in Zukunft praktikabel sein.

Bei der **FINITE-ELEMENT-METHODE** (FEM) wird ein Gebiet, hier das Siloinnere, in Elemente aufgeteilt. Die Geschwindigkeit des Materials wird mit Ansatzfunktionen beschrieben, an deren Stützstellen, den Elementknoten, die Zustandsgrößen berechnet werden. Die Methode ist eine Variationsformulierung, die im Gebiet ein Minimum des Gesamtpotentials fordert (Kapitel 5). Es werden kontinuummechanische Modelle zur Beschreibung der Schüttguteigenschaften herangezogen. Hauptsächlich finden elasto-plastische Modelle von Mises oder von Lade mit einem Grenzkriterium nach Drucker und Prager und in neuerer Zeit hypoplastische Modelle von Kolymbas oder von Gudehus und von Wolffersdorff (Kapitel 3.3.7) Verwendung.

Berechnungen mit unterschiedlichen Stoffmodellen finden sich in den Arbeiten von Rombach (1991) und Weidner (1990). Hier zeigt sich die Überlegenheit der Hypoplastizität gegenüber der Elasto-Plastizität, denn die Stoffparameterbestimmung ist wesentlich einfacher und die berechneten Spannungen und Geschwindigkeiten stimmen gut mit experimentellen Werten überein (siehe auch Lehmann (1996)). Die Arbeit von Lehmann (1996), *Einbauten in Silos*, zeigt, dass quasi-statische Vorgänge mit ausgezeichneter Genauigkeit berechnet werden können. Lehmann untersucht neben elasto-plastischen Stoffmodellen nach Drucker/ Prager und dem Modell nach Lade das hypoplastische Stoffmodell nach Kolymbas von 1988. Die Ergebnisse der Simulationsrechnung mit dem hypoplastischen Modell für die Wandspannungen im Füllzustand zeigen eine besonders gute Übereinstimmung mit den experimentell ermittelten Messdaten. Es wird das FINITE-ELEMENT-METHODE Berechnungsprogramm SILO ¹ verwendet.

Braun (1997) untersucht Erdbebeneinwirkungen auf Silos mit einem modifizier-

¹Das FINITE-ELEMENT-METHODE Berechnungsprogramm SILO ist bis 1991 bei Prof.Dr.-Ing. J.Eibl in Karlsruhe am Institut für Massivbau entwickelt worden, siehe Rombach (1991). In den Jahren 1992-1996 wurde das Programm SILO von Dr.-Ing. L.Lehmann (1996), in Braunschweig am Institut für Angewandte Mechanik, auf Einbauten und 3-D erweitert.

ten hypoplastischen Modell nach Kolymbas und dem Modell nach Gudehus und von Wolffersdorff. Braun untersucht die Leistungsfähigkeit der Modelle anhand des Ödometer- (Bild 3.6) und des Triaxialversuchs (Bild 3.4), welche bei der Parameterbestimmung und Charakterisierung von Schüttgütern Verwendung finden. Es zeigt sich, dass die hypoplastischen Modelle die Schüttguteigenschaften gut abbilden und eine einfachere numerische Handhabung als die elasto-plastischen Modelle gewährleisten.

Bei den stochastischen Untersuchungen der Silobeanspruchung verwendet Dahlhaus (1995) ein hypoplastisches Modell nach Kolymbas. Er ermittelt Druckspitzen des Füllzustandes infolge stochastischer Verteilung von Materialwerten. Für die Untersuchung von dynamischen Effekten bei der Siloentleerung verwenden sowohl Ruckenbrod (1995) als auch Tejchman (1997) einen Kontinuumsansatz und ein hypoplastisches Stoffmodell.

Neuere Arbeiten auf dem Gebiet der Kontinuumsmodelle sind von Svendsen, Hutter und Laloui (1999) mit Blick auf thermodynamische Theorien und von Hutter und Rajagopal (1994) mit Blick auf die Fließeigenschaften von granularem Material angefertigt worden. Beschreibungen, die sich mit dem Fluidverhalten von granularen Medien beschäftigen, sind unter anderem in Haff (1983) und in Mas-soudi und Ahmadi (1994) zu finden.

Die Erweiterung der Kontinuumsmodelle um Verdrehfreiheitsgrade wird mit dem sogenannten COSSERAT-Kontinuum eingeführt. Zweidimensionale Untersuchungen mit diesem Modell finden sich in Mühlhaus (1987) und Tejchman (1997), auch mit hypoplastischer Stoffbeschreibung, wobei die Einführung des zusätzlichen Verdrehfreiheitsgrades zur Stabilisierung der Simulationsrechnung genutzt wird und Bereiche mit Scherverformungen ausgemacht werden können, da im Bereich von Scherdeformationen der COSSERATterm angesprochen wird. Bei der Diskretisierung der Finiten-Elemente werden zusätzliche Anforderungen an die Elementgröße gestellt, die mit den zu berechnenden Partikelgrößen korrespondieren müssen (Mühlhaus (1987)). Eine Simulationsrechnung in 3-D wird auf Grund der enormen Anzahl von zusätzlichen Freiheitsgraden erst in Zukunft möglich sein.

Die Simulation von Schüttgut mit einer Kontinuumsbeschreibung ergibt für unterschiedliche Anwendungsgebiete eine gute Übereinstimmung von berechneten und experimentellen Daten. Besonders leistungsfähig ist die Kombination der FINITE-ELEMENT-METHODE mit einem hypoplastischen Stoffmodell.

1.3 Eigene Arbeit

Mit der vorliegenden Arbeit soll die Berechnung von dynamischen Vorgängen beim Entleeren von Silos ermöglicht werden. Hierzu ist ein Stoffmodell erforderlich, welches die Eigenschaften des Schüttgutes sowohl im Füllzustand, als auch beim Entleeren und somit beim schnellen Fließen abbildet. Ferner muss die verwendete Berechnungsmethode die erforderliche Genauigkeit und Stabilität gewährleisten. Mit dem im Rahmen dieser Arbeit erweiterten FINITE-ELEMENT-METHODE Berechnungsprogramm SILO können Entleerungsvorgänge über Zeiträume von mehreren Sekunden mit verschiedenen Schüttgütern simuliert werden (Kapitel 6).

Zunächst werden in Kapitel 2 die mechanischen Grundlagen erarbeitet. Hierzu gehören die Wahl des Bezugssystems und die Formulierung der kinematischen Beziehungen.

Im Kapitel 3 werden Vorüberlegungen zur Wahl eines Stoffmodells getroffen und ein Überblick über kontinuummechanische Stoffmodelle gegeben. Es folgt die begründete Auswahl von zwei hypoplastischen Stoffmodellen, die in dieser Arbeit Verwendung finden. Die Modelle werden im Detail vorgestellt, wobei eine dynamische Erweiterung um einen viskosen Term (Kapitel 3.6) angegeben wird.

Das Kapitel 4 stellt die Versuchssilos sowie die Messtechnik vor und zeigt die Modellbildung für die FEM Berechnung. Im Besonderen sei hier auf die Modellierung der Wand verwiesen, die durch die Interaktion mit dem Schüttgut großen Einfluss auf das dynamische Verhalten des Systems hat.

Im Kapitel 5 werden die Implementierung des Stoffmodells in das verwendete FINITE-ELEMENT-METHODE Berechnungsprogramm SILO und die Formulierung der Randbedingungen am Auslass des Silos dargelegt, wobei sich zeigt, dass es nötig ist, die Geschwindigkeit am Auslass vorzugeben. Die numerische Umsetzung von möglichst realistischen Öffnungs- und Abzugsgeschwindigkeiten wird vorgestellt.

Die Berechnungsbeispiele in Kapitel 6 zeigen die Leistungsfähigkeit des verwendeten Verfahrens und der verwendeten Stoffmodelle. Es werden Kern- und Massenflusssilos mit verschiedenen Schüttgütern berechnet, wobei das Hochlaufen des Switch, Scherzonen zwischen bewegtem und ruhendem Schüttgut und die auftretenden Schwingungen im Silo gezeigt und die Ergebnisse mit experimentell ermittelten Daten verglichen werden.

2 MECHANISCHE GRUNDBEZIEHUNGEN

Für die Modellierung von Schüttgütern gibt es prinzipiell zwei Beschreibungsmöglichkeiten: die Beschreibung der einzelnen Partikeln, z. B. mit der DISKRETE-ELEMENT-METHODE, und die Beschreibung als Kontinuum (siehe Kapitel 1.2). Die Betrachtung eines Körpers als Kontinuum nimmt eine gleichmäßige Verteilung der Stoffeigenschaften, wie z. B. der Masse, an. Die Gleichgewichtsbedingungen werden am infinitesimalen Volumenelement formuliert.

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine Kontinuumbeschreibung für das Schüttgut verwendet. Im Folgenden werden die erforderlichen Grundbeziehungen und die verwendeten Stoffmodelle (Kapitel 3) angegeben.

2.1 Bezugssystem

Die Zustandsänderung in einem Raumpunkt oder eines Partikels von einem Ausgangszustand zum Zeitpunkt t_0 zu einem deformierten Zustand zum Zeitpunkt t kann auf zwei Arten erfolgen:

- Mit der **materiellen** LAGRANGESchen Betrachtungsweise wird die Lageänderung (Bewegung) beschrieben. Die Lage \mathbf{x} und die Verschiebung \mathbf{u} eines Partikels mit dem Ortsvektor \mathbf{X} im deformierten Zustand zum Zeitpunkt t (siehe Bild 2.1) ist gegeben durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}), \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}) \quad \text{bzw.} \quad x_i = x_i(X_j), u_i = u_i(X_j). \quad (2.1)$$

Der Beobachter befindet sich auf einem bewegten materiellen Punkt und erfährt die zeitliche Ortsänderung.

- Mit der **raumbezogenen** EULERSchen Betrachtungsweise wird der Zustand an einem Raumpunkt \mathbf{x} beschrieben. Am Ort \mathbf{x} befindet sich im deformierten Zustand zum Zeitpunkt t (siehe Bild 2.1) ein Partikel, welches eine be-

stimmte Verschiebung erfahren hat

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad X_i = X_i(x_j), u_i = u_i(x_j). \quad (2.2)$$

Der Beobachter befindet sich auf einer ruhenden Raumstelle und erfährt die Änderung der Feldgrößen, die das Kontinuum beschreiben.

Die Schreibweise der Koordinaten X_i mit Großbuchstaben bezeichnet die körperfesten materiellen Koordinaten, die Schreibweise der Koordinaten x_i mit Kleinbuchstaben bezeichnet die raumfesten Ortskoordinaten.

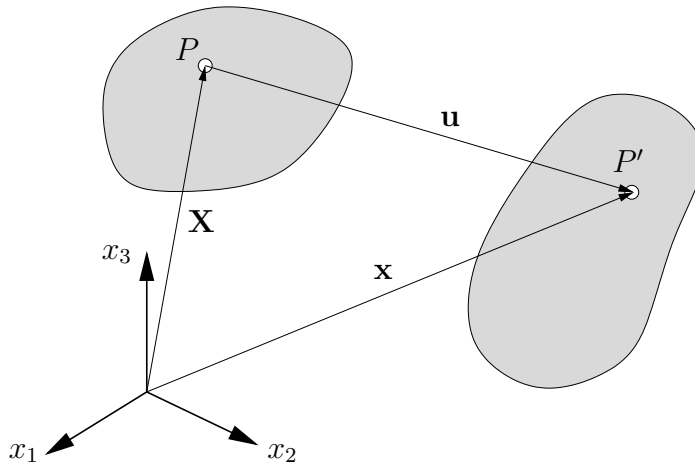


Bild 2.1: Verformung eines Körpers: Lage des Punktes P zum Zeitpunkt t_0 (links) und P' zum Zeitpunkt t (rechts)

Die EULERSche Formulierung verwendet ein unverformtes Koordinatensystem x_i (Bild 2.2) und bei der LAGRANGESchen Beschreibung wird das Koordinatensystem X_i mitverformt. Bei der LAGRANGESchen Beschreibung sind die materiellen Koordinaten X_i die unabhängigen Variablen. Diese Betrachtungsweise eignet sich besonders für Aufgabenstellungen der Elastomechanik. Die EULERSche Formulierung hat die raumfesten Ortskoordinaten x_i als unabhängige Veränderliche.

Für die numerische Simulation vom Fließen bietet das EULERSche Bezugssystem Vorteile, da hier die Zustandsänderung in einem konstanten Kontrollvolumen beobachtet wird. Dies entspricht dem Enleerungsprozess des Silos, hier ist der Silo das 'konstante' Kontrollvolumen und das Schüttgut die bewegte Materie. Daher wird die EULERSche Betrachtungsweise für die Beschreibung der Siloentleerung verwendet. Im Folgenden werden die mechanischen Grundgleichungen für das EULERSche Bezugssystem angegeben.

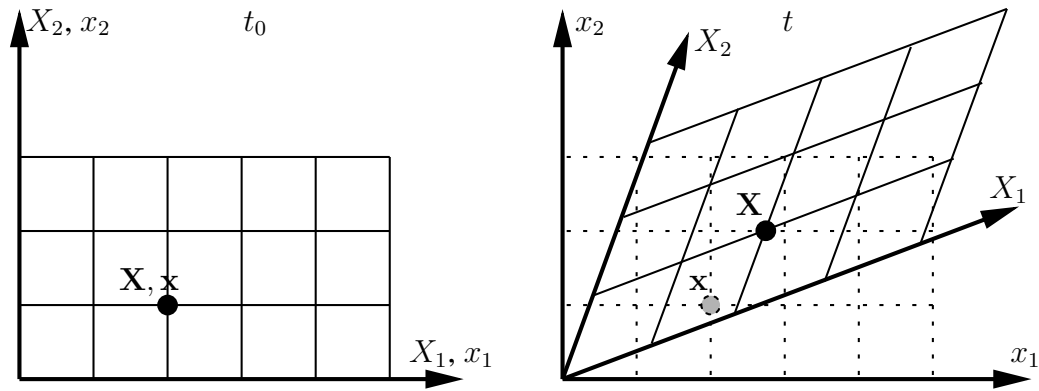


Bild 2.2: Bezugssysteme zu den Zeitpunkten t_0 und t : EULER x_i ortsfest, LAGRANGE X_i mitbewegt

2.2 Dynamisches Gleichgewicht

Aus dem Gleichgewicht der an einem Körper angreifenden inneren Kräfte \mathbf{b} sowie der Trägheitskräfte $\rho \dot{\mathbf{v}}$ wird die Bewegungsgleichung des Kontinuums formuliert:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(\mathbf{x}, t)(\mathbf{b} - \dot{\mathbf{v}}) &= 0 \\ \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j - \rho \frac{dv_j}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

\mathbf{T}	EULERScher oder CAUCHYScher Spannungstensor
ρ	spezifische Masse des Schüttgutes
\mathbf{b}	Volumenkräfte
\mathbf{v}	Geschwindigkeitsvektor
∇	Nablaoperator (siehe A.2)

In (2.3) ist $\dot{\mathbf{v}}$ die materielle Ableitung der Relativgeschwindigkeit. Dies entspricht der zeitlichen Ableitung bezogen auf einen körperfesten Punkt

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (2.4)$$

2.3 Kontinuitätsgleichung

Die sich beim Entleeren verändernde Dichte des Schüttgutes hat Einfluss auf das Materialverhalten und wird durch die Kontinuitätsbedingung berücksichtigt

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0.\end{aligned}\tag{2.5}$$

2.4 Kinematische Beziehungen

In dieser Arbeit werden Stoffmodelle vom Ratentyp verwendet, die von einer Beziehung zwischen der Spannungs- und Deformationsgeschwindigkeit ausgehen (siehe Gleichung (3.1) und (3.2)). Die Vorgänge beim Entleeren von Silos werden also durch geschwindigkeitsabhängige Tensoren beschrieben. Diese Tensoren hängen von dem Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} und dessen zeitlichen Ableitungen, jedoch *nicht* von den Verformungen des Materials, ab.

Aus der Zerlegung des Geschwindigkeitsgradiententensors \mathbf{L}

$$\mathbf{L} = \mathbf{v} \nabla \quad L_{ij} = v_{i,j} \tag{2.6}$$

in einen symmetrischen und einen unsymmetrischen (schiefsymmetrischen) Anteil

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad L_{ij} = D_{ij} + W_{ij} \tag{2.7}$$

ergeben sich zwei Raten:

1. aus dem **symmetrischen** Anteil die Deformationsrate (rate-of-deformation-tensor oder stretching tensor, Truesdell und Noll (1992))

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}^s = \frac{\mathbf{L} + \mathbf{L}^T}{2} = \frac{\mathbf{v} \nabla + \nabla \mathbf{v}}{2} \quad D_{ij} = \frac{v_{i,j} + v_{j,i}}{2} \tag{2.8}$$

2. aus dem **schiefsymmetrischen** Anteil die Rotationsrate bzw. der Drehgeschwindigkeitstensor (spin-tensor)

$$\mathbf{W} = \mathbf{L}^a = \frac{\mathbf{L} - \mathbf{L}^T}{2} = \frac{\mathbf{v}\nabla - \nabla\mathbf{v}}{2} \quad W_{ij} = \frac{v_{i,j} - v_{j,i}}{2}. \quad (2.9)$$

Weiterhin wird die Verformungsbeschleunigung, die sich aus der zeitlichen Ableitung der Deformationsrate \mathbf{D} ergibt, benötigt (Truesdell und Noll (1992))

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \dot{\mathbf{D}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{W}. \quad (2.10)$$

2.5 Spannungsrate

Für die Formulierung der Stoffmodelle wird die JAUMANNsche Spannungsrate $\dot{\mathbf{T}}$ (auch 'mitgedrehte Spannungsrate' oder engl.: *co-rotated stress rate*) verwendet.

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} : \mathbf{W} - \mathbf{W} : \mathbf{T}. \quad (2.11)$$

Durch die Addition der Zeitableitung $\dot{\mathbf{T}}$ mit der Differenz aus Rechts- und Linksmultiplikation des Spannungstensors mit der Rotationsrate \mathbf{W} werden die Rotationsanteile *herausgezogen*.

3 STOFFMODELLE

Es gibt eine Vielzahl von Stoffmodellen, die Schüttgüter in ihrem Verhalten beschreiben. In dieser Arbeit werden die hypoplastischen Modelle von Kolymbas 1989 und von Gudehus/v. Wolffersdorff 1996 verwendet. Sie bilden das Verhalten von Schüttgütern gut ab und benötigen vier bzw. acht Stoffparameter. Die beiden Modelle sind ein guter Kompromiss zwischen Bestimmbarkeit der Stoffparameter (Kapitel 3.4.3) und Abbildung des Materialverhaltens. Durch die Erweiterung des Modells von Gudehus und von von Wolffersdorff 1996 um einen viskosen Term (Kapitel 3.6) wird die Berechnung von schnellem Fließen und langen Entleerungszeiten möglich.

Im Folgenden werden Begriffe aufgeführt, die zur Beschreibung des Materialverhaltens nötig sind, und dann die wichtigsten kontinuummmechanischen Theorien zur Schüttgutmodellierung zusammengestellt und erläutert (Kapitel 3.3). In den Kapiteln 3.3.7 und 3.4 wird die Theorie der Hypoplastizität vorgestellt und die Wahl der verwendeten Stoffmodelle begründet.

3.1 Vorüberlegungen zu Stoffmodellen für Schüttgüter

3.1.1 Begriffe zur Beschreibung von Schüttgütern

Die Schüttgutmechanik bedient sich einiger Begriffe, die zur Beschreibung des Materialverhaltens nötig sind. Hier eine Zusammenstellung:

Dilatanz: Einfluss der *Verformungen* auf die *Dichteänderung* des Schüttgutes (unabhängig vom hydrostatischen Druckanteil).

Pyknotropie: Einfluss der *Dichte* auf das mechanische Verhalten des Schüttgutes.

Barotropie: Einfluss des *Spannungsniveaus* auf die *Steifigkeit* und die *Festigkeit* des Schüttgutes.

Argotropie: Einfluss der *Belastungsgeschwindigkeit* auf das Materialverhalten

Plastizität: Schüttgüter verhalten sich nahezu rein plastisch, elastische Dehnungen sind nicht messbar (Feise (1996)).

3.1.2 Schüttgutzustände in Silos

Schüttgüter in Silos nehmen im Wesentlichen zwei Zustände ein:

1. Im **Füllzustand** sind die **Festkörpereigenschaften** charakterisierend für das Verhalten des Schüttgutes. Die Festkörpereigenschaften sind geprägt durch eine komplexe Interaktion der Einzelkörner untereinander. Die Einflüsse aus Feuchtigkeit, Spannungs- und Verformungszustand sowie aus der Belastungsgeschichte des Schüttgutkörpers sind zu berücksichtigen.
2. Beim **Entleeren** treten Phänomene auf, die dem Verhalten einer Flüssigkeit ähnlich sind. Vor allem im Bereich des Auslaufs sind Auflockerung des Schüttgutkörpers, bei der die Festkörpereigenschaften verloren gehen, und schnelles Fließen vorherrschend. In diesem Bereich sind **Flüssigkeitseigenschaften** und große Scherverformungen vorhanden.

Die unter 1 genannten Festkörpereigenschaften im Füllzustand sind mit einem Kontinuummodell gut abbildbar. Die unter 2 beschriebenen Phänomene des schnellen Fließens können mit der Einschränkung, dass die Auflockerung nicht die Bedingung des einfachen Korngerüsts (Kapitel 3.2) verletzt, als kontinuierlich betrachtet werden. Mit einer geeigneten Fluidbeschreibung (siehe Kapitel 3.6) ist es möglich, das schnelle Fließen im Auslaufbereich zu simulieren.

Die Bedingungen des einfachen Korngerüsts sind durch die starke Auflockerung des Schüttgutes im Auslaufbereich nicht unbedingt erfüllt. Die Kontinuumbeschreibung ist daher nicht immer gültig. Es stellt sich die Frage nach geeigneten Methoden, um dieses diskontinuierliche Materialverhalten im Rahmen der Kontinuumsmechanik besser abzubilden.

3.2 Kontinuumbeschreibung

In dieser Arbeit wird der Schüttgutkörper, der aus vielen Einzelpartikeln besteht, als Kontinuum angenommen. Das Schüttgutverhalten, welches durch Kornumlagerungen, Volumenänderungen und Spannungsänderungen gekennzeichnet ist, wird durch Laborversuche bestimmt und in den Stoffparametern des Stoffmodells ausgedrückt (Kapitel 3.5).

Die niederfrequenten Schwingungen der Silokonstruktion sind nach Hardow auf die Bewegung der Schüttgutsäule, also auf die Beteiligung von großen Schüttgutmassen im Siloschaft zurückzuführen. Hierfür ist die Kontinuummmodellierung gut geeignet.

Die Ursache der Entstehung der hörbaren Frequenzen ist nicht so eindeutig zu klären. Entweder entstehen die hochfrequenten Schwingungen im Schüttgutkörper durch Korn-Korn-Kontakt (Bagnold (1973)) oder durch die Interaktion mit der Silowand. Die Effekte an der Silowand können mit einem Kontinuummodell durch entsprechende Randbedingungen und Kontaktelemente dargestellt werden. Schwingungseffekte, die durch Korn-Korn-Kontakt bei Umlagerungen entstehen, müssen auf der Partikelebene untersucht werden. Hierfür bieten sich die Partikelmethode an, die die Eigenschaften des einzelnen Korns beschreiben. Jedoch überschreitet die Partikelanzahl im Silo bei weitem die Rechenleistung der heutigen Computer. Die laufende Forschung ist deshalb bemüht die Entstehung der intergranularen Schwingungen mit einem Partikelmodell zu klären und anschließend mittels Homogenisierung auf ein Kontinuummodell zu übertragen.

Die kontinuummechanischen Modelle erfüllen die Axiome der materiellen Objektivität und der Koordinateninvarianz, d.h. das Stoffmodell ist invariant gegenüber der Lage und Bewegung raumfester Koordinatensysteme. Die Spannungs- und Dehnungsbeziehungen sind unabhängig vom Bezugssystem, d.h. die Variablen müssen Tensoren sein.

Die kontinuummechanische Beschreibung von Schüttgütern ist auf die vereinfachende Annahme eines sogenannten einfachen Korngerüstes angewiesen (siehe auch Herle (1997)). **Einfache Korngerüste** besitzen folgende Eigenschaften:

- **Integrität:** Die Schüttgutpartikeln bleiben während des Betrachtungszeitraumes unverändert erhalten. Die Körner sind permanent, d.h. es entstehen keine Kornbrüche oder Abplatzungen.

- **Kontinuität:** Wird das Schüttgut als Kontinuum dargestellt, müssen die Partikeln so klein sein, dass die Annahme eines über dem Elementvolumen stochastisch gemittelten (verschmierten) Stoffes richtig ist.
- **Lokalität:** Ein Partikel wird in seinem Verhalten nur durch die Kontaktstellen zu benachbarten Partikeln beeinflusst. Effekte auf Molekülebene und Feststoffbrücken sind vernachlässigbar.
- **Nicht-Polarität:** Momentenspannungen haben keinen Einfluss auf das Materialverhalten.
- **Einphasigkeit:**
 - Es treten keine Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Phasen des Schüttgutes auf. Es werden hier ausschließlich trockene Materialien betrachtet.
 - Die Hohlräume des Korngerüstes (Skelett) stehen immer unter Umgebungsdruck.
 - Es wird das Verhalten des Feststoffgerüstes beschrieben.
- Der Zustand des Schüttgutes ist durch den Spannungstensor und die Porenzahl definiert.
- Die Deformationen des Schüttgutkörpers beruhen auf Kornumlagerungen.
- Bei proportionalen Deformationspfaden werden auch die Spannungspfade proportional, unabhängig vom Ausgangsspannungszustand.
- Gleichmäßige Randverschiebungen haben gleichmäßige Verformungen des Granulatelementes zur Folge.

Kontinuummodelle, deren Stoffparameter aus Elementversuchen gewonnen werden, bilden immer die Eigenschaften eines Probenkörpers ab. Dies bedeutet, dass Kontinuummodelle Eigenschaften, die aus der Kornform oder aus Kontaktproblemen resultieren, sowie das Dilatanzverhalten beschreiben. Die Eigenschaften des Schüttgutes sind in den Parametern 'versteckt'. Das Verhalten bei hohen Fließgeschwindigkeiten mit Scherverformungen wird mit dem hier vorgestellten Modell mit dynamischer Erweiterung (Kapitel: 3.6) beschrieben. Die Scherzone, das Abgleiten des Schüttgutes auf der toten Zone, kann dargestellt werden.

3.3 Übersicht der Stoffmodelle für Schüttgüter

Eine vergleichende Zusammenstellung von Stoffmodellen für Schüttgüter findet sich bei Weidner (1990). Theoretische Untersuchungen zum Materialverhalten und zur Modellbildung finden sich unter anderem bei Feise (1996) oder speziell zum hypoplastischen Modell bei Wu (1992) und Bauer (1996). Die Beschreibung von Schüttgut mittels hypoplastischer Stoffmodelle (Kolymbas (2000)) hat sich als sehr effektiv herausgestellt (Lehmann (1996), Rombach (1991) und Herle (1997)). Im Folgenden seien die bekannten kontinuummmechanischen Stoffmodelle zusammengestellt.

3.3.1 Hyperelastizität

Bei elastischen Stoffmodellen sind die Verformungen vollständig reversibel, es geht keine Verformungsenergie verloren. Der aktuelle Spannungszustand ist von den aktuellen Deformationen abhängig. Die Hyperelastizität ist als Sonderfall in der CAUCHYSchen Elastizitätstheorie enthalten. Bei den hyperelastischen Stoffmodellen wird die Existenz eines elastischen Potentials angenommen. Die Spannungen und Dehnungen (bzw. deren Raten) ergeben sich durch die partiellen Ableitungen der Potentialfunktion nach den Dehnungen und Spannungen (bzw. deren Raten). Die hyperelastischen Stoffmodelle sind pfadunabhängig (z. B. Hookesche Gesetz). Die Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch.

3.3.2 Hypoelastizität

Truesdell (1955) stellt mit der Hypoelastizität eine Theorie vor, mit der das unbeschränkte Fließen beschrieben werden kann. Es existiert keine Potentialfunktion und hypoelastische Stoffe haben keine bevorzugte Richtung, d.h. jeder Spannungszustand ist erlaubt, wenn er die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Die Spannung ist pfad- jedoch nicht geschwindigkeitsabhängig und die Steifigkeitsmatrix ist unsymmetrisch. Die CAUCHYSchen Elastizität ist in der Hypoelastizität als Sonderfall enthalten. Ein hypoelastisches Stoffmodell bereitet Probleme, wenn der Stofftensor \mathbf{H} singular wird. Die Singularitäten treten bei definierten Spannungszuständen auf und führen dazu, dass sich das Material nahezu unbegrenzt verformen kann. Bei Näherungsverfahren, die eine zu große Abweichung von der exakten Lösung ergeben, kann der Definitionsbereich verlassen werden

und es kommt zu unrealistischen Ergebnissen.

3.3.3 Plastizitätstheorie

Die Plastizität beschreibt eine fortschreitende Verformung eines Körpers ohne Erhöhung der aufgebrachten Kraft. Die plastischen Verformungen sind irreversibel, d.h. bei Entlastung nimmt der Körper nicht mehr die Ausgangskonfiguration an. In der Plastizitätstheorie werden einem Körper elastische und plastische Anteile zugesprochen. Beim Erreichen einer Grenzbedingung wird vom elastischen (reversiblen) auf den plastischen (irreversiblen) Bereich umgeschaltet.

Für Schüttgüter lässt sich experimentell kein elastischer Bereich finden. Daher erfolgt die Einteilung in einen elastisch und plastischen Bereich eher willkürlich. Für Be- und Entlastung sind Schaltfunktionen erforderlich. Es ergeben sich viele Stoffparameter, die schwierig zu kalibrieren sind. Auch beim Übertragen der Theorie auf Schüttgüter ergeben sich Schwierigkeiten. So ist die Einführung einer nichtassozierten Fließregel nötig, um zu große Dilatanz zu vermeiden. Bei der Volumenänderung infolge hydrostatischer Spannung sind mehrere Fließflächen vorhanden.

3.3.4 Endochrome Theorie

Valanis (1971) stellt die endochrome Theorie als Alternative zur Plastizitätstheorie vor. Es können irreversible Verformungen von Metallen ohne Annahmen aus der Plastizitätstheorie dargestellt werden. Es wird eine wenig gebräuchliche Integralform benutzt, die numerisch schlecht zu implementieren ist. Bazant (1978) wandelt das endochrome Modell in eine inkrementelle Form um. Das endochrome Modell ist der hypoplastischen Theorie sehr ähnlich, es gibt jedoch einen grundlegenden Unterschied: Bazant benutzt die Norm der deviatorischen Dehnungsrate anstatt der Norm der Dehnungsrate. Daher ist eine Koppelung zwischen den volumetrischen und den deviatorischen Anteilen der Spannungs- und Dehnungsraten erforderlich. Hierzu werden komplizierte Koppelfunktionen benötigt, die Gültigkeit ist auf beschränkte Spannungspfade begrenzt. Die weitere Entwicklung der endochronen Theorie nähert sich der Plastizitätstheorie wieder an.

3.3.5 Hyperplastizität

Unter Hyperplastizität versteht man alle Stoffmodelle, die eine oder mehrere Potentialfunktionen verwenden. Der Name Hyperplastizität ergibt sich auf Grund der verwendeten Potential- und Schaltfunktionen in Analogie zur Hyperelastizität. Die Belastung und Entlastung sind durch unterschiedliche Relationen beschrieben. Es sind Schaltfunktionen erforderlich, die den Einsatz steuern. Es ergibt sich ein inkrementell nichtlineares Verhalten, da die Schaltfunktionen von der Deformationsrate \mathbf{D} (oder dem objektiven Spannungstensor $\dot{\mathbf{T}}$ nach JAUMANN) abhängen. Die Richtung der plastischen Streckgeschwindigkeit ist mit der Normalen der Fließfläche verknüpft. Diese hängt nur vom aktuellen Spannungszustand ab und ist damit unabhängig von der Spannungsrate. Experimente zeigen jedoch, dass die Spannungsrate die Richtung der Streckgeschwindigkeit beeinflusst (Lo und Lee (1990)).

3.3.6 Stress Vertex-Theory

Die *Stress Vertex*-Theory (Rudnicki und Rice (1975)) ist eine spezielle Plastizitätstheorie in Anlehnung an die Arbeit von Batdorf und Budiansky aus dem Jahre 1945. Sie setzt mehrere Verformungsmechanismen voraus: Jeder Verformungsmechanismus erhält eine Potentialfunktion, die Spannung im Spannungsraum befindet sich stets in einem singulären Punkt und es gilt die KOITERSche Fließregel. Auf diese Weise wird mit der *Stress Vertex*-Theory ein Zusammenhang zwischen der Richtung der plastischen Streckgeschwindigkeit und der Spannungsrate hergestellt.

3.3.7 Hypoplastizität

Die Hypoplastizität (*inkrementell nichtlineares Modell*) ist eine Theorie, die plastische Verformungen beschreibt, ohne Potential- oder Schaltfunktionen zu verwenden. Die plastischen und elastischen Verformungen werden mit einer einzigen Gleichung beschrieben. Hypoplastische Modelle berücksichtigen plastische Verformungen vom Belastungsbeginn an. Dies entspricht dem Verhalten von Schüttgut besonders gut und die Kodierung in ein FINITE-ELEMENT-METHODE Berechnungsprogramm ist besonders einfach.

Hypoplastizität geht zurück auf Arbeiten von Truesdell (1955) und Truesdell und

Noll (1992). Eine aktuelle Beschreibung zur Hypoplastizität findet sich in Kolymbas (2000).

Entwickelt wurden inkrementell nichtlineare Stoffmodelle für Schüttgüter von zwei Forschergruppen, in Grenoble von Darve (1974, 1982) und Chambon (1979, 1981, 1989) und in Karlsruhe wurde von Kolymbas (1988) und Gudehus (1979) im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 'Silo' in den 80er und frühen 90er Jahren grundlegende Forschung auf dem Gebiet der hypoplastischen Modelle betrieben. Erweiterungen und Verbesserungen wurden durch die Arbeiten von Bauer (1992) und Wu (1992) für die Stoffeigenschaften in Abhängigkeit von der Porosität eingeführt. Die Arbeiten von Mühlhaus (1987) und Tejchman (1989) beschäftigen sich mit dem Einfluss der Korndrehungen auf das Materialverhalten, vornehmlich im Bereich von Scherbereichen, mit der Einführung der COSSERAT Verdrehung.

Die erste Version des Modells von Kolymbas (1977) stellte eine komplizierte tensorielle Funktion dar. Da die Spannung, die Spannungsrate und die Dehnungsrate in einen volumetrischen und deviatorischen Anteil zerlegt sind, können die Stoffkonstanten nur schwer kalibriert werden. Die Modellversion von Kolymbas (1988) stellte mit vier zu bestimmenden Stoffkonstanten eine wesentlich einfachere Form der Funktion dar. Es können viele Aspekte des Verhaltens von Schüttgütern beschrieben werden. In einer Weiterentwicklung aus dem Jahre 1996 stellen Gudehus und von Wolffersdorff ein Modell vor, welches die Porenzahl und die Spannungsabhängigkeit in besonders effizienter Weise implementiert (Gleichung (3.2)).

3.4 Verwendete hypoplastische Modelle

Die Ergebnisse von Rombach (1991) zeigen, dass einfache plastische oder elastoplastische Modelle für die dynamische Berechnung von Entleerungsvorgängen in Silos nicht geeignet sind, da sie eine zu starke Vereinfachung der realen Erscheinungen darstellen.

Folgende Einschränkungen sind hier zu nennen:

1. Annahme des Bruchzustandes im *gesamten* Schüttgut trifft nicht zu.
2. Rein plastische Modelle ermöglichen keine Aussage über die Spannungs-

entwicklung und das Verformungsverhalten des Schüttgutes.

3. Schaltfunktionen oder einfache Grenzbedingungen widersprechen den Versuchsergebnissen und erscheinen oft willkürlich.

Daher werden in dieser Arbeit hypoplastische Modelle verwendet. Es sind dies das Modell von Kolymbas 1988 und das Modell von Gudehus und von von Wolffersdorff 1996. Beide Modelle bilden die grundlegenden Eigenschaften von Schüttgütern gut ab. Das Modell von Kolymbas 1988 hat sich bereits für quasistatische Siloberechnungen bewährt (Lehmann (1996)).

Erste dynamische Berechnungen im Rahmen dieser Arbeit zeigen, dass das verwendete hypoplastische Stoffmodell von 1988 Konvergenzprobleme hat, somit also nur für quasistatische Berechnungen Gültigkeit besitzt (siehe 3.4.1). Versuchsrechnungen mit verschiedenen neuen Stoffmodellen haben ergeben, dass das hypoplastische Stoffmodell in der Fassung von von Wolffersdorff (1996) und Gudehus (1996) (siehe (3.2)) mit neuen Erweiterungen für die Dynamik und den Dichteinfluss (siehe Kapitel 3.6) besonders gut für die dynamischen Berechnungen geeignet ist. Dieses Modell berücksichtigt die Schüttguteigenschaften in Abhängigkeit von der Porenzahl und dem Spannungsniveau. Somit gewinnt der Dichteinfluss die Bedeutung, die beim Schüttgut tatsächlich vorhanden ist.

3.4.1 Modell nach Kolymbas 1989

Die Modellversion (3.1) kann für quasistatische Vorgänge, wie das Füllen des Silos, verwendet werden. Bei dynamischen Berechnungen treten Konvergenzprobleme und Netzabhängigkeiten auf (siehe auch Bild 6.1).

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{T}} &= \underbrace{C_1 \frac{1}{2} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}) + C_2 \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{1}}_{\text{elastisch}} + \underbrace{C_3 \mathbf{T} \sqrt{\text{tr}(\mathbf{D}^2)} + C_4 \frac{\mathbf{T}^2}{\text{tr}(\mathbf{T})} \sqrt{\text{tr}(\mathbf{D}^2)}}_{\text{plastisch}} \\
 &= \mathcal{H} : \mathbf{D}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

\mathbf{T} bezeichnet den CAUCHYschen Spannungstensor und $\dot{\mathbf{T}}$ den JAUMANNschen Spannungstensor. Die Spur $\text{tr}(\mathbf{T}) = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$ (siehe auch A.2) entspricht dem hydrostatischen Spannungsanteil. Der symmetrische Anteil des

Geschwindigkeitsgradienten ist der Deformationsratentensor $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\nabla + \nabla\mathbf{v})$ (2.8), mit \mathcal{H} wird der Materialtensor vierter Stufe bezeichnet. Die vier Materialkonstanten C_1 bis C_4 lassen sich aus einem einzigen Triaxialversuch bestimmen. Daher ist es besonders effektiv, für dieses Modell die Stoffparameter zu bestimmen. Die elastischen Anteile sind linear in \mathbf{D} und die plastischen Anteile sind nichtlinear in \mathbf{D} . Durch die Vorzeichen der Materialkonstanten C_1 bis C_4 können plastische Verformungen dargestellt werden, die keine Änderung der Spannung zur Folge haben.

Reduziert sich der hydrostatische Spannungsanteil (Druck) gegen Null, versagt das Modell (3.1), denn die Stoffparameter, die bei einem bestimmten Druckniveau im Triaxialversuch bestimmt wurden, verlieren ihre Gültigkeit. Beim Entleeren treten in der Nähe des Auslaufbereichs sehr bald Spannungszustände nahe Null auf; daher ist dieses Modell für Entleerungsberechnungen nicht geeignet.

3.4.2 Modell nach von Wolffersdorff 1996

Die Entleerungsberechnungen werden mit dem Modell nach von Wolffersdorff 1996 durchgeführt. Dieses Modell enthält zusätzliche Spannungsfunktionen und das Stoffverhalten wird von der Porenzahl beeinflusst. Hierdurch verbessert sich das Konvergenzverhalten und die Schüttguteigenschaften werden besser wiedergegeben. Jedoch erhöht sich die Anzahl der notwendigen Stoffparameter auf acht (die Beschreibung der Parameter und der Bestimmungsversuche findet sich in Kapitel 3.4.3). Die Modellgleichung stellt sich wie folgt dar:

$$\dot{\mathbf{T}} = f_b f_e \frac{1}{tr(\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}})} \left[\underbrace{F^2 \mathbf{D} + a^2 \hat{\mathbf{T}} tr(\hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D})}_{\text{elastisch}} + \underbrace{f_d a F (\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}') ||\mathbf{D}||}_{\text{plastisch}} \right] \quad (3.2)$$

Hierbei bezeichnet der dimensionslose Tensor

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{T} / tr(\mathbf{T}) \quad (3.3)$$

den auf die hydrostatischen Spannungen ($tr(\mathbf{T}) = T_{ii}$) bezogenen CHAUCHYSchen Spannungstensor \mathbf{T} . Ferner wird der Deviator des dimensionslosen Spannungstensors $\hat{\mathbf{T}}$

$$\hat{\mathbf{T}}' = \hat{\mathbf{T}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \quad (3.4)$$

verwendet.

Die Spannungsfunktion nach dem MATSUOKA–NAKAI–Spannungskriterium sorgt für zulässige Spannungszustände im Schüttgut. Diese skalare Spannungsfunktion F (3.5) berücksichtigt den Spannungszustand im Schüttgut durch den Deviator des auf den mittleren Druck bezogenen CAUCHYschen Spannungstensors $\hat{\mathbf{T}}'$:

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{8} \tan^2 \kappa + \frac{2 - \tan^2 \kappa}{2 + \sqrt{2} \tan \kappa \cos(3\Theta)}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan \kappa \quad (3.5)$$

$$\tan \kappa \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{3} \|\hat{\mathbf{T}}'\|$$

$$\cos(3\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} -\sqrt{6} \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{T}}' \cdot \hat{\mathbf{T}}' \cdot \hat{\mathbf{T}}')}{\left[\text{tr}(\hat{\mathbf{T}}' \cdot \hat{\mathbf{T}}')\right]^{3/2}}.$$

Die Spannungsfunktion F verwendet den LODE-Winkel Θ und den Betrag des deviatorischen Spannungsanteils $\|\hat{\mathbf{T}}'\|$ (siehe Bild 3.1 und Anhang A.3). Mit dieser Spannungsfunktion F können zulässige Spannungszustände im Schüttgut berechnet werden. Für $\|\hat{\mathbf{T}}'\| = 0$ und für die zylindrische Kompression gilt $F = 1$ (siehe auch Kolymbas (1999) und Herle (1997)). Bei der Simulation von Ent-

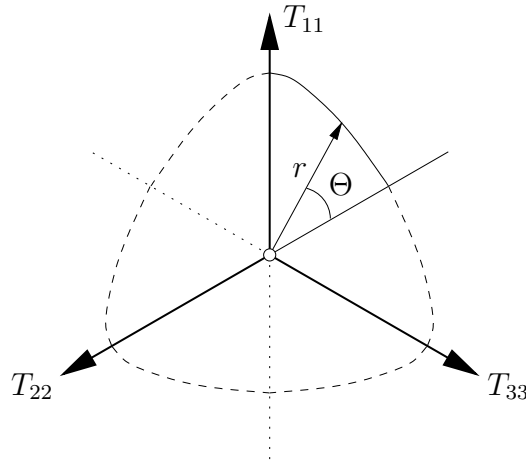


Bild 3.1: Fließgrenzfläche eines bestimmten hydrostatischen Spannungszustandes in der Projektion auf die Deviatorebene: mit $r = \|\hat{\mathbf{T}}'\|$ und LODE-Winkel Θ

leerungsvorgängen mit diesem Modell unter Verwendung der Spannungsfunktion F sind kleine Zeitschritte erforderlich. Insbesondere, wenn die hydrostatischen

Spannungen klein werden, sind sehr kleine Zeitschritte nötig, um eine Konvergenz der Simulation zu erreichen bzw. zulässige Spannungszustände zu finden. Die Zeitschrittweite liegt etwa bei 10^{-6} s, während im Vergleich dazu mit dem einfachen Modell (3.1), mit einer Zeitschrittweite von etwa 10^{-3} s gerechnet werden kann. Daher wird für die Entleerungsberechnung eine hohe Rechenleistung benötigt. Im verwendeten FINITE-ELEMENT-METHODE Berechnungsprogramm SILO wird die erforderliche Zeitschrittweite Δt mit der Bedingung

$$\Delta t = \frac{0.01 \cdot |tr(\mathbf{T})|}{\|\dot{\mathbf{T}}\| + 10 \cdot \|\mathbf{D}\| |tr(\mathbf{T})|} \quad (3.6)$$

überprüft (siehe HÜGEL (1995)). Diese Zeitschrittenüberprüfung berücksichtigt den Spannungszustand \mathbf{T} , die Spannungsrate $\dot{\mathbf{T}}$ und die Deformationsrate \mathbf{D} . Bei Überschreitung der Zeitschrittweite Δt bricht die Konvergenz des Berechnungsverfahrens nach wenigen Zeitschritten ab.

Der Faktor a in Gleichung (3.2) steuert den Einfluss des Reibungswinkels φ_c auf das Materialverhalten und wird nach (Herle 1997) folgendermaßen gebildet:

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi_c)}{2\sqrt{2} \sin \varphi_c}. \quad (3.7)$$

Der Einfluss der Schüttgutdichte auf das Materialverhalten ist beim Entleeren besonders groß. Im Auslaufbereich und in Scherzonen (Dilatanz) entstehen Zonen der Auflockerung und in anderen Bereichen kommt es zur Verfestigung des Schüttgutes. Die Dichte kann über die Porenzahl $e = V_p/V_s$ beschrieben werden. Hier ist die Porenzahl e gleich dem Porenvolumen V_p bezogen auf das Kornvolumen V_s . Schon kleinste Änderungen der Porenzahl bewirken eine große Änderung des Materialverhaltens. Grenzwerte für lockerste und dichteste Lagerung können mit einfachen Laborversuchen bestimmt werden (siehe Kapitel 3.4.3 und Tabelle 3.1). Die Porenzahlen für die lockerste Lagerung e_i , für dichteste Lagerung e_d und für die kritische Lagerungsdichte e_c sind in Bild 3.8 dargestellt. In Gleichung (3.2) werden die skalaren Faktoren f_e , f_d und ein Faktor f_b für den Druckspannungseinfluss eingeführt, die folgendermaßen festgelegt sind:

$$f_d \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{e - e_d}{e_c - e_d} \right)^\alpha \quad (3.8)$$

und

$$f_e \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{e_c}{e} \right)^\beta. \quad (3.9)$$

und

$$f_b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h_s}{n} \left(\frac{e_{i0}}{e_{c0}} \right)^\beta \frac{1 + e_i}{e_i} \left(\frac{3p_s}{h_s} \right)^{1-n} \left[3 + a^2 - a\sqrt{3} \left(\frac{e_{i0} - e_{d0}}{e_{c0} - e_{d0}} \right)^\alpha \right]^{-1}. \quad (3.10)$$

Je größer die Dichte, desto kleiner ist der Faktor f_d und der Einfluss des nicht-linearen (plastischen) Teils in Gleichung (3.2). Für $f_d = 0$ beschreibt das Stoffmodell ein hypoelastisches Materialverhalten. Die skalaren Exponenten α , β , n und die Granulathärte h_s sind Stoffkonstanten und werden aus Elementversuchen bestimmt (siehe Tabelle 3.1 und Kapitel 3.4.3).

3.4.3 Stoffparameter für das Modell von von Wolffersdorff 1996

Für das Modell nach von Wolffersdorff (3.2) sind acht Stoffkonstanten mit Standardlaborversuchen zu bestimmen (vergleiche hierzu auch die Arbeit von Herle (1997)). Eine Zusammenfassung der Parameter und deren Bestimmungsmethoden findet sich in Tabelle 3.1. Im Folgenden werden die acht Stoffparameter diskutiert.

1. Kritischer Reibungswinkel φ_c

Herle (1997) schlägt für kohäsionslose Schüttgüter den Schüttkegelversuch zur Ermittlung des kritischen Reibungswinkels φ_c vor. Das Schüttgut erreicht beim *Fließen* über den sich bildenden Kegel große Verformungen, so dass von einem kritischen Zustand ausgegangen werden kann. Der Einfluss des Kornmaterials auf den kritischen Reibungswinkel ist nach Herle eher gering. Einen wesentlichen Einfluss auf den kritischen Reibungswinkel φ_c haben demnach:

- Die Kornform

hat den größten Einfluss auf den Reibungswinkel, z. B. bei Partikeln aus Glas:

$$\varphi_c = 23^\circ \text{ für Kugelform und}$$

$$\varphi_c = 42^\circ \text{ für Splitt.}$$

Für Quarzsande wird ein $\Delta\varphi$ von $8^\circ - 9^\circ$ für den Unterschied zwischen rund und scharfkantigem Korn ermittelt.

- Die Korngröße

bewirkt: Je größer die Körner, desto größer der Reibungswinkel φ_c . Der Einfluss der Größe ist geringer als der Einfluss der Kornform. Für mittlere Korndurchmesser $d_{50} \leq 0,4\text{mm}$ werden die Schüttwinkel wieder größer, was auf zunehmende Anziehungskräfte zwischen den Körnern zurückzuführen ist.

- Die Kornverteilung

hat den geringsten Einfluss auf den kritischen Reibungswinkel φ_c . Bei einer Korngrößenverteilung $U = 1$ besteht die Probe aus nur einer Korngröße, hat also eine kleine Ungleichförmigkeit in der Korngrößenverteilung. Der kritische Reibungswinkel φ_c erreicht für Ungleichförmigkeiten $U = 2$ ein Minimum und nimmt dann für steigende Ungleichförmigkeiten wieder zu. Der maximale Unterschied des Reibungswinkel φ_c in Abhängigkeit von der Ungleichförmigkeit der Korngrößenverteilung beträgt etwa 1° , hat also praktisch keinen Einfluss auf das Materialverhalten.

Effektiver Reibungswinkel φ_e

Wenn bei andauernder Scherverformung einer Probe die Spannungs- und volumetrischen Dehnungsraten verschwinden, kann der effektive Reibungswinkel φ_e aus diesem sich nicht mehr ändernden (*residuellen*) Zustand mit konstantem Spannungsverhältnis berechnet werden.

$$\dot{\mathbf{T}} = 0 \quad \text{und} \quad tr(\mathbf{D}) = 0 \quad (\dot{\epsilon} = 0).$$

Bei Scherversuchen im JENICKE-Gerät (Bild 3.2) oder im Ringschergerät (Bild 3.3) werden homogene Deformationen des Probenkörpers angestrebt. Hieraus kann in guter Näherung der effektive Reibungswinkel φ_e oder auch Peakreibungswinkel φ_p berechnet werden. Mit der größten Hauptspannung σ_1 und der kleinsten Hauptspannung σ_2 gilt:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \sin \varphi_e.$$

Ein genau definierter Spannungs- und Verformungszustand lässt sich mit der Zweiaxialscherzelle erreichen (Bild 3.5). Mit der Zweiaxialbox kann der Reibungswinkel für feinkörnige Schüttgüter mit hoher Genauigkeit bestimmt werden (Zetzener (2000)). Die in dieser Arbeit verwendeten groben Schüttgüter ($d_{50} > 2\text{mm}$) lassen sich in der Zweiaxialbox des Instituts für Mechanische Verfahrenstechnik (IMVT) nicht untersuchen, da der Probenraum zu klein ist. Hierfür ist das Ringschergerät (Bild 3.3) besser geeignet.

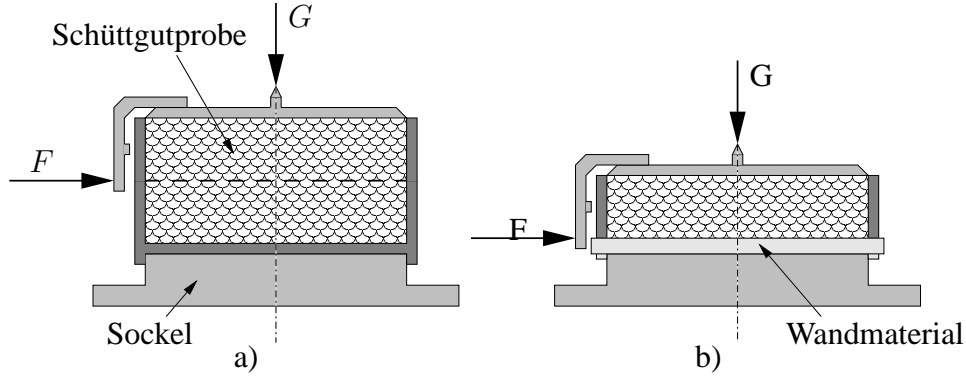


Bild 3.2: JENICKE Scherzelle: a) Bestimmung des inneren Reibungswinkels φ_e , b) Bestimmung des Wandreibungswinkels φ_w

2. Granulathärte h_s

Die Granulathärte h_s kann als Kompressionsbeiwert angesehen werden und wird hauptsächlich vom Kornmaterial beeinflusst. Je scharfkantiger die Körner sind und je kleiner die Ungleichförmigkeit ist, desto höher ist die Zusammendrückbarkeit, also desto kleiner ist die Granulathärte h_s . Das Kompressionsverhalten von Schüttgütern wird nach Bauer (1996) durch folgende Bedingung beschrieben:

$$e_i = e_{i0} e^{-\left(\frac{3p_s}{h_s}\right)^n}. \quad (3.11)$$

Betrachtet man die zeitliche Ableitung, also die Änderung der Porenzahl e_i , so erhält man folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= -e_i n \frac{3}{h_s} \dot{p}_s \left(\frac{3p_s}{h_s}\right)^{n-1} \\ \dot{p}_s &= -\frac{1}{3} \frac{h_s}{n} \left(\frac{3p_s}{h_s}\right)^{1-n} \frac{\dot{e}_i}{e_i} \\ \text{bzw.} &= -\frac{1}{3} \frac{h_s}{n} \left(\frac{3p_s}{h_s}\right)^{1-n} \left(\frac{1}{e_i} + 1\right) \frac{\dot{e}_i}{1 + e_i}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Mit dieser Formulierung und der Annahme für den Kompressionsmodul


$$K = \frac{1}{3} \cdot \frac{h_s}{n} \left(\frac{3p_s}{h_s} \right)^{1-n} \left(\frac{1}{e_i} + 1 \right) \quad (3.13)$$

Mit der Gleichung (3.13) und numerischer Regression können die Granulathärte h_s und der Exponent n bestimmt werden. Als Versuche hierfür kommen der Ödometerversuch (Bild 3.6) oder eine isotrope Kompression, z. B. in einer Zweiaxialbox (Bild 3.5), in Betracht.

$$T_2 = (1 - \sin \varphi_c) \cdot T_1. \quad (3.14)$$

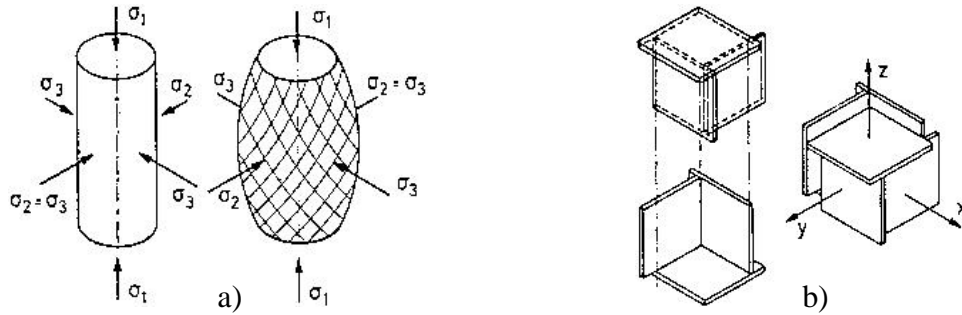


Bild 3.4: Triaxialversuch: a) mit umgebendem Flüssigkeitsdruck, b) Triaxialversuch mit deformationsfreien Wänden (Schwedes (1998))

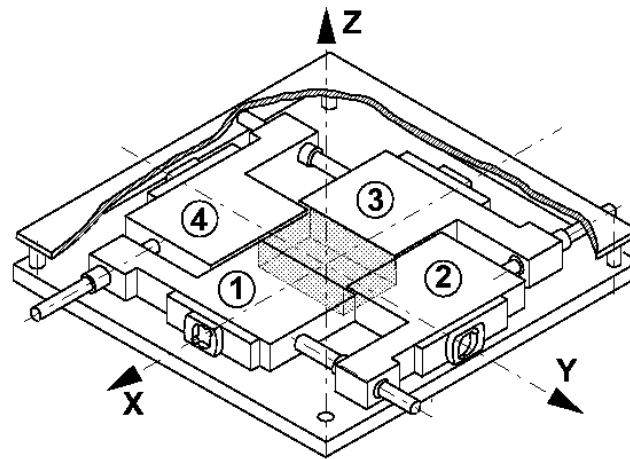


Bild 3.5: Zweiachsalbox des Institutes für Mechanische Verfahrenstechnik (IMVT) der TU-Braunschweig (Schwedes (1998))

Da die oben genannte numerische Regression nicht unbedingt eindeutige Ergebnisse liefert, ist dieses Verfahren nicht zu empfehlen. Die Granulathärte h_s kann jedoch bei bekanntem n aus

$$h_s = 3 p_s \left(\frac{n e}{C_c} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.15)$$

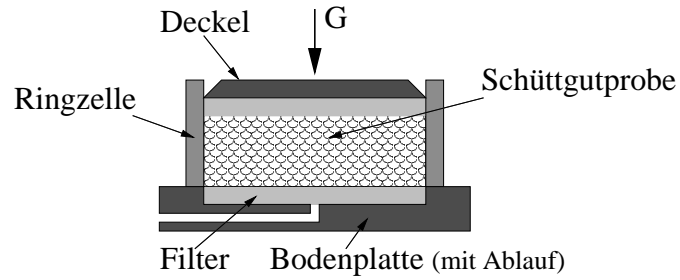


Bild 3.6: Ödometer

berechnet werden. Der Kompressionsbeiwert C_c ist folgendermaßen definiert:

$$C_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{de}{d \ln(p_s)}. \quad (3.16)$$

C_c ist die Steigung an der Stelle $\ln(p_s)$ im Kompressionsdiagramm, wobei die Porenzahl e des Schüttgutes über dem Logarithmus des Drucks $p_s = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{T})$ aufgetragen wird (Bild 3.7).

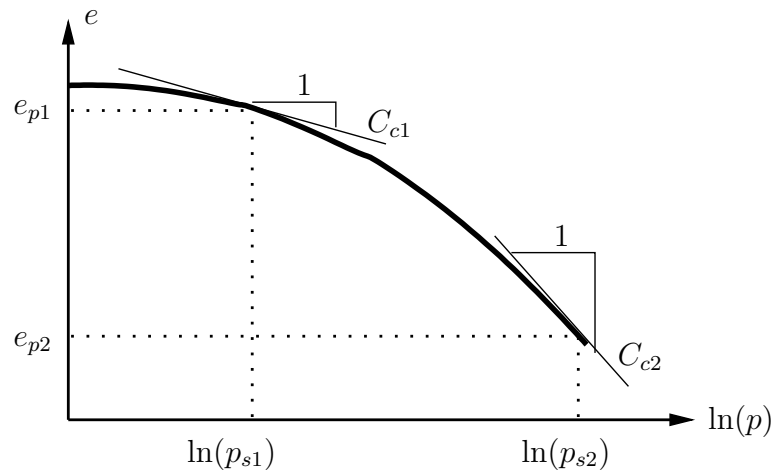


Bild 3.7: Ödometrische Kompressionskurve: Die Bestimmung des Kompressionsbeiwertes C_c von Schüttgütern für verschiedene Drücke $p_s = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{T})$

3. Exponent n

Der Exponent n ergibt sich aus dem Kompressionsdiagramm (Bild 3.7). Liest man an zwei Stellen $\ln(p_{si})$ die Werte e_{pi} und C_{ci} ab, erhält man mit der Gleichung (3.15) eine Gleichung für n :

$$n = \frac{\ln\left(\frac{e_{p1} C_{c2}}{e_{p2} C_{c1}}\right)}{\ln\left(\frac{p_{s2}}{p_{s1}}\right)}. \quad (3.17)$$

Der Exponent n ist bei großen Druckänderungen nicht konstant; daher ist auch h_s (3.15) über große Druckspannungsbereiche hin keine Stoffkonstante mehr. Die Bestimmung des Exponenten n sollte daher in dem Druckspannungsbereich durchgeführt werden, in dem das Material untersucht werden soll.

4. Porenzahl bei dichtester Lagerung e_{d0}

Die Porenzahl bei dichtester Lagerung e_{d0} hängt im Wesentlichen von der Ungleichförmigkeit und der Kornform ab; sie wird infolge Scherung beim Korndruck Null erreicht. Ein verschwindender Korndruck kann im Versuch nicht dargestellt werden, da dieser Zustand ein Ausschalten der Schwerkraft voraussetzt. Der Wert kann mittels der Bestimmungsgleichung

$$e_{d0} = e_d e \left(\frac{3p_s}{h_s} \right)^n \quad (3.18)$$

extrapoliert werden. Hierzu müssen die Parameter n und h_s bereits bekannt sein. Nach Herle (1997) erreicht man mit zyklischer Scherbelastung im Ein-fachschergerät dichtere Kornpackungen als mit vergleichbaren Rütteltisch- oder Schlaggabelversuchen. Zahlreiche Untersuchungen haben jedoch ergeben, dass die Porenzahl aus zyklischer Scherung mit der Extrapolation für Korndruck Null e_{d0} aus Gleichung (3.18) der minimalen Porenzahl e_{min} entspricht, die aus den Standardversuchen mit Rütteltisch oder Schlaggabel erreicht werden. Die unvollständige Kompression bei den Standardversuchen gleicht die nicht zu realisierende Kornspannung Null aus. Es gilt näherungsweise

$$e_{d0} \approx e_{min}.$$

Somit kann die dichteste Lagerung bei Korndruck Null e_{d0} durch e_{min} aus Rütteltisch- oder Schlaggabelversuch bestimmt werden.

5. Porenzahl bei lockerster isotroper Lagerung e_{i0}

Die Porenzahl bei lockerster isotroper Lagerung e_{i0} ist die größtmögliche Porenzahl bei Korndruck Null. Es gilt die Gleichung (3.11). Jedoch ist e_{i0} im Schwerfeld der Erde ein hypothetischer Wert, da durch die Schwerkraft der Korndruck Null überschritten wird. Der Zustand des größten Porenraumes kann als Übergang von der Suspension eines Stoffes in den Zustand des *einfachen Korngerüstes* (Kapitel 3.2) betrachtet werden. Der Wert e_{i0} hängt im wesentlichen von der Kornform und der Ungleichförmigkeit ab. Vergleiche zwischen theoretischen Werten für Kugel- oder Würfelpackungen und gemessenen Werten für z. B. Glaskugeln und Zuckerwürfel, nach Standardverfahren (z. B. Einsieben), haben zu Näherungslösungen geführt. So gibt Herle (1997) für Quarzsande das Verhältnis $e_{i0}/e_{max} \approx 1.15$ an. Bei Glaskugeln ergibt sich $e_{i0}/e_{max} \approx 1.18$ und bei Zuckerwürfeln $e_{i0}/e_{max} \approx 1.33$. Eine höhere Ungleichförmigkeit ergibt eine dichtere Packung und somit ein kleineres e_{i0} . Die maximale Porenzahl bei lockerster Lagerung e_{max} kann mittels Standardversuchen bestimmt werden.

6. Porenzahl im kritischen Zustand e_{c0}

Die Porenzahl im kritischen Zustand e_{c0} beschreibt die dichteste Packung beim Korndruck Null. Mit der Extrapolation von messbaren Werten unter realistischen Druckverhältnissen kann mit

$$e_{c0} = e_c e \left(\frac{3p_s}{h_s} \right)^n \quad (3.19)$$

der hypothetische Wert e_{c0} berechnet werden. Die Kenntnis der Parameter n und h_s sei vorausgesetzt. Vergleiche mit verschiedenen Materialien haben gezeigt, dass die Annahme $e_{c0} \approx e_{max}$ gerechtfertigt ist. Bei Materialien, deren Kornkanten leicht brechen, ist diese Annahme nicht zutreffend, da hier das Porenvolumen infolge der Scherung im kritische Zustand kleiner wird. Hierbei wird die Annahme der Integrität des *einfachen Korngerüstes* (Kapitel 3.2) verletzt.

Zwischen e_i und e_c befindet sich e_p im sogenannten SOM-Bereich ('swept out of memory') siehe Bild 3.8. In diesem Bereich verliert das Schüttgut infolge der Auflockerungen die *Erinnerung* an die vorhergehende Belastungsgeschichte.

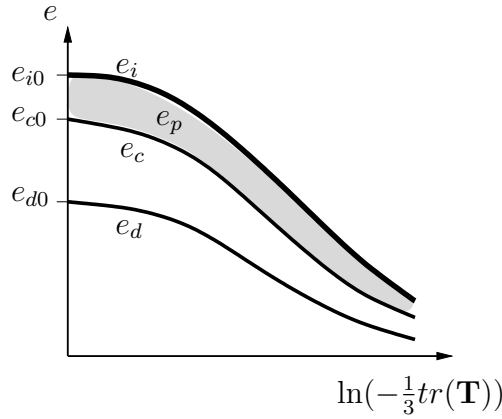


Bild 3.8: Porenzahlen: Gültigkeitsbereich der Porenzahlen, obere Grenze e_i , untere Grenze e_d , kritische Porenzahl e_c und SOM-Bereich ('swept out of memory') e_p

7. Exponent α

Der Exponent α steuert den Einfluss der Dichte auf den Reibungswinkel im Korngerüst. Herle (1997) führt eine druckabhängige Lagerungsdichte, die relative Porenzahl r_e , ein

$$r_e = \frac{e - e_d}{e_c - e_d}, \quad (3.20)$$

die in Bild 3.9 zur Bestimmung von α verwendet werden kann.

Er vergleicht diese mit der bezogenen Lagerungsdichte D_r , wobei sich für kleine Drücke $e^{-(3p_s/h_s)^n} \approx 1$ und demnach

$$r_e \approx 1 - D_r \quad (3.21)$$

ergibt.

Für höhere Drücke, z. B. Sand bei 100kPa, tritt eine Abweichung von ca. 20% auf, die Näherung aus (3.21) verliert somit die Gültigkeit. Mit der vollständigen Modellgleichung (3.2) können für die Messwerte aus einem Triaxialversuch im Peakzustand, das heißt bei $\dot{\mathbf{T}} \rightarrow 0$, und bei bekannter relativer Porenzahl r_e , der Peakreibungswinkel φ_p bzw. der effektive Reibungswinkel $\varphi_e = \sin((\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2))$ ermittelt werden. Bei bekanntem effektivem Reibungswinkel φ_e und mit der relativen Porenzahl r_e kann man die kinematischen und statischen Bedingungen des Versuches in die

Gleichung (3.2) einsetzen und α bestimmen. Der Exponent α kann mit dem Peakreibungswinkel φ_p bzw. dem effektiven Reibungswinkel φ_e aus der triaxialen Kompression oder Scherversuchen und dem kritischen Reibungswinkel φ_c , aus dem Schüttkelversuch mit Hilfe der Diagramme in Bild 3.9 bestimmt werden. Als Richtwert für Sand gibt Herle (1997) an, dass bei $28^\circ \leq \varphi_c \leq 36^\circ$ für den Exponenten α gilt: $0,1 \leq \alpha \leq 0,3$.

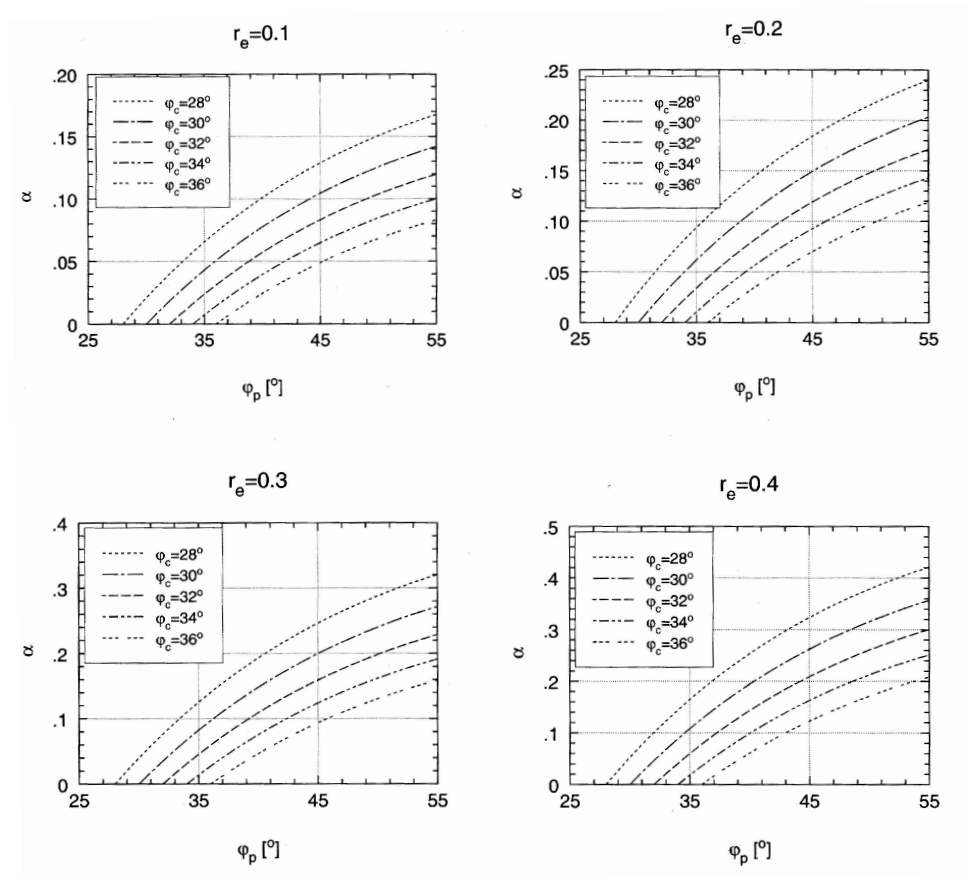


Bild 3.9: Abhängigkeit des Exponenten α vom Peakreibungswinkel $\varphi_p = \varphi_e$ (aus Scherversuch) und vom kritischen Reibungswinkel φ_c (aus Schüttkegelversuch) für verschiedene relative Porenzahlen r_e bei triaxialer Kompression, aus Herle (1997)

8. Exponent β

Der Exponent β wirkt auf den skalaren Faktor f_e (3.9) in der Modellgleichung (3.2):

$$f_e \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{e_c}{e} \right)^\beta \quad (3.22)$$

Der Faktor f_e bewirkt eine Zunahme der Spannungsrate bei konstanter Deformationsrate und konstantem mittleren Druck, jedoch steigender Dichte des Materials. Bei anfangs dichter Lagerung hat der Exponent β besonders großen Einfluss auf das Stoffverhalten. Für die Berechnung von β müssen alle Stoffparameter bekannt sein, und es ergeben sich Werte für β zwischen 0,95 und 1,30 bei $0,1 \leq \alpha \leq 0,3$. Da beim gefüllten Silo im bodenmechanischen Sinn nicht von einer dichten Lagerung ausgegangen werden kann, wird an dieser Stelle auf die genaue Ermittlung von β verzichtet und der von Herle (1997) vorgeschlagene Näherungswert $\beta \approx 1,0$ angesetzt.

3.5 Parameter der verwendeten Schüttgüter

Mit den in Kapitel 3.4.3 genannten Laborversuchen werden die Schüttgüteeigenschaften charakterisiert. Für die verwendeten Schüttgüter PET (Polyethylenterephthalat), PP (Polypropylen) und PS (Polystyrol) werden die Stoffparameter des konstitutiven Stoffmodells nach Gudehus und von Wolffersdorff Gleichung (3.2) ermittelt (siehe Tabelle 3.1). Die Parameter für die Stoffe PET und PP sind in Tabelle 3.2 zusammengestellt und werden für die Simulationsrechnungen (Kapitel 6) verwendet. Die zum Teil erheblichen Abweichungen von den Werten für PET zu den Werten von Herle sind mit dem Ödometerversuch (Bild 3.6) zu erklären: PET ist sehr wenig komprimierbar und die Auswertung der Kompressionskurve (siehe Bild 3.7) gestaltet sich in dem verwendeten schmalen Druckniveau für Siloanwendungen besonders schwierig.

3.6 Dynamische Erweiterung

Die Auflockerung und das schnelle Fließen von Schüttgut beim Entleeren aus Silos ist mit Stoffmodellen, die lediglich mit den herkömmlichen bodenmechanischen Prüfverfahren, wie Scherversuch oder Triaxialversuch, kalibriert werden,

Parameter			Versuche und Bestimmungsgleichungen
φ_c	kritischer Reibungswinkel		Schüttkegelversuch: Kornform und -größe haben den größten Einfluss.
φ_e	effektiver Reibungswinkel		Scherversuche: JENICKE-Scherzelle, Ringschergerät oder Triaxialversuch.
h_s	Granulathärte oder Kompressionsbeiwert		Im Ödometer ausgehend von <i>sehr</i> lockeren Proben. Mittels numerischer Regression aus beliebiger proportionaler Kompression, d.h. auf <i>linearem</i> Verformungspfad (Zweiachsalbox). Mit den Bestimmungsgleichungen: $h_s = 3p_s \left(\frac{ne_p}{C_c}\right)^{\frac{1}{n}}$ und oder $e_p = e_{p0} \exp\left[-\left(\frac{3p_s}{h_s}\right)^n\right]$. Bei bekanntem Exponenten n und Kompressionsbeiwert C_c .
n	Exponent		Mittels ödometrischer Kompression kann eine Kompressionskurve Bild 3.7 erstellt werden. So gilt Gleichung (3.17). Druckbereich der Anwendung sollte Druckbereich für die Bestimmung von n sein.
e_{d0}	Porenzahl bei dichtester Lagerung		Porenzahl infolge zyklischer Scherung beim Korndruck Null $p_s \rightarrow 0$, nur bei Schwerelosigkeit möglich, daher Extrapolation mit $e_{d0} = e_d \exp\left[\left(\frac{3p_s}{h_s}\right)^n\right]$. In Näherung gilt $e_{d0} \approx e_{min}$ aus Rütteltisch oder Schlaggabelversuch. Unvollkommene Kompression der Standardversuche gleicht Schwerkrafteinfluss aus.
e_{i0}	Porenzahl bei verschwindendem Korndruck $p_s \rightarrow 0$ (größte mögliche Porenzahl)		In etwa $e_{i0} \sim e_{c0}$ der Quotient $\frac{e_{i0}}{e_{c0}}$ hängt von der Kornform und Ungleichförmigkeit ab. Für $U \downarrow \Rightarrow$ Quotient \downarrow und für <i>eckigere</i> Körner $\uparrow \Rightarrow$ Quotient \uparrow . Für Quarzsand $e_{i0}/e_{i\max} \approx 1,15$.
e_{c0}	Porenzahl im kritischen Zustand		Scherversuch mit lockerer Probe $e_{c0} = e_c \exp\left[\left(\frac{3p_s}{h_s}\right)^n\right]$. Es gilt die Annahme $e_{c0} \approx e_{\max}$.
α	Exponent (druckbez. Lagerungsdichte)		Es gilt: $0,1 < \alpha < 0,3$. Bestimmung aus φ_c , φ_p und r_e und nach Herle (1997) 3.9.
β	Exponent (Spannungsmultiplikator f_c)		Kann in erster Näherung zu 1,0 angenommen werden. Genauer mit dem Vergleich der Steifemodule lockerer und dichter Proben im Kompressionsversuch (siehe Herle (1997)).

Tabelle 3.1: Hypoplastisches Modell: Zusammenstellung der verwendeten Stoffparameter und deren Bestimmungsverfahren

Parameter		PET (Herle 1997)	PET	PP	PS
Krit. Reibungswinkel	φ_c	32	30	29	29
Eff. Reibungswinkel	φ_e	-	44	39	42
Granulathärte	h_s	$1.1 \cdot 10^5$	$7.7 \cdot 10^3$	$1.0 \cdot 10^4$	$1.7 \cdot 10^4$
Kritische Porenzahl	e_{c0}	0.73	0.72	0.66	0.74
Dichteste Porenzahl	e_{d0}	0.53	0.54	0.59	0.64
Lockerste Porenzahl	e_{i0}	0.80	0.74	0.68	0.76
Exp. Druckeinfluss	n	0.330	0.456	0.380	0.362
Exp. Reibungswinkel	α	0.08	0.18	0.14	0.19
Exp. Dichte	β	1.00	1.00	1.00	1.00

Tabelle 3.2: Stoffparameter für das Modell nach von Wolffersdorff 1996: Schüttgüter PET (Polyethylenterephthalat), PP (Polypropylen) und PS (Polystyrol), Vergleich zu den Parametern von Herle (1997) für PET

nicht zu beschreiben. Es sind weitere Bestimmungsversuche für die Fließeigenschaften erforderlich. Im Rahmen dieser Arbeit wird eine Erweiterung des quasi-statischen Stoffmodells (Gleichung (3.2)) mit einem viskosen Zusatzterm verwendet. Die Bestimmungsversuche für die neuen dynamischen Parameter (siehe Kapitel 3.6.3) befinden sich in Vorbereitung. Es werden optische Messverfahren eingesetzt, die es ermöglichen, das Fließen des Schüttgutes unter verschiedenen Bedingungen zu messen. Mit Simulationsrechnungen können dann die dynamischen Parameter angepasst werden.

3.6.1 Viskosität im Schüttgut

Für die Beschreibung der dynamischen Vorgänge sowie der raschen Bewegungen des Schüttgutes wird eine Ergänzung der statischen Modellgleichungen (3.1) oder (3.2) erforderlich. Das viskose Verhalten von Schüttgütern ist spätestens seit Bagnold (1954) bekannt.

Die Beschreibung des Fluidverhaltens kann durch einen additiven Term, der zu der hypoplastischen Modellgleichung hinzugefügt wird, erfolgen. In der Arbeit von Hwang (1994) wird die Herleitung für das kinetische hypoplastische Modell aus einer allgemeinen Funktionalgleichung für den in Ratenform angegeben. Es ergibt sich eine Summe aus der hypoplastischen Stoffgleichung, einem viskosen

Term und einem Term, bei dem die Deformationsrate quadratisch eingeht. Somit kann das viskose Verhalten sowohl im Experiment (Bagnold (1954)) beobachtet, als auch theoretisch (Hwang (1994)) hergeleitet werden.

Die JAUMANNsche Spannungsrate $\dot{\mathbf{T}}$ aus (3.2) oder aus (3.1) wird um einen geschwindigkeitsabhängigen Term additiv erweitert (siehe auch Gudehus (1979) und Häußler (1984)).

$$\dot{\mathbf{T}} = \underbrace{h(\mathbf{T}, \mathbf{D})}_{\text{quasistatisch}} + \underbrace{g(\mathbf{T}, \mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}})}_{\text{viskos}} = \dot{\mathbf{T}}_s + \dot{\mathbf{T}}_v = \mathcal{H} : \mathbf{D} + \mathcal{G} : \dot{\mathbf{D}} \quad (3.23)$$

Die Abkürzungen $\dot{\mathbf{T}}_s$ und $\dot{\mathbf{T}}_v$ stehen für die statischen bzw. dynamischen Anteile der JAUMANNschen Spannungsrate. \mathcal{G} bezeichnet hier den geschwindigkeitsabhängigen viskosen Stofftensor, dieser ist verknüpft mit der JAUMANNschen Deformationsrate $\dot{\mathbf{D}}$. Der erste Summand aus (3.23) beschreibt den quasistatischen Anteil und der zweite den geschwindigkeitsabhängigen viskosen Anteil, der beim schnellen Fließen die Scherspannungen berücksichtigt. Es existiert keine klare Trennung zwischen den beiden Anteilen. In der Rechnung werden generell beide Anteile berücksichtigt.

Bei der Berechnung von proportionalen Verformungspfaden hat der viskose Anteil zwei Aufgaben:

1. Solange sich das Material in Bewegung befindet und die Fließgrenze bzw. die Singularitätsbedingung des statischen Teiles nicht erreicht ist, hat das granulare Material noch eine von Null verschiedene Steifigkeit.
2. Der viskose Anteil übernimmt an den Stellen einsetzender Bewegung eine dämpfende Wirkung und stabilisiert dadurch die Berechnung.

Visko-plastische Stoffmodelle haben ein stabileres numerisches Lösungsverhalten als jene ohne Viskosität. Die Grundvoraussetzung hierfür ist jedoch, dass die viskosen Spannungen im Verlauf der Rechnung abklingen und ein stationärer, elasto-plastischer bzw. hypoplastischer Gleichgewichtszustand erreicht wird.

Für die Berechnung des CAUCHYschen Spannungstensors aus Gleichung (3.23) im EULERSchen Bezugssystem muss das Stoffmodell und daher die JAUMANNsche Spannungsrate $\dot{\mathbf{T}}$ auf das raumfeste Koordinatensystem transformiert werden. Die

JAUMANNsche Spannungs- bzw. Deformationsrate $\dot{\mathbf{T}}$ und $\dot{\mathbf{D}}$ sind gemäß Gleichung (2.11) $\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} : \mathbf{W} - \mathbf{W} : \mathbf{T}$ und $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{D} : \mathbf{W} - \mathbf{W} : \mathbf{D}$ definiert. Unter Berücksichtigung des konvektiven Terms der zeitlichen Ableitung von $\dot{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{T}$ und $\dot{\mathbf{D}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{D}$ (vergleiche Gleichung (2.4)) ergibt sich die Gleichung (3.23) zu:

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = \underbrace{\mathcal{H} : \mathbf{D} + \mathcal{G} : \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}_{\text{physikalisches Materialverhalten}} - \underbrace{(\mathbf{T} : \mathbf{W} - \mathbf{W} : \mathbf{T} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{T}) + \mathcal{G} : (\mathbf{D} : \mathbf{W} - \mathbf{W} : \mathbf{D} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{D})}_{\text{geometrisch nichtlineare Formulierung}}. \quad (3.24)$$

Mit numerischer Integration von Gleichung (3.24) kann der CAUCHYsche Spannungstensor \mathbf{T} berechnet werden. Die statischen und dynamischen Anteile müssen für das Modell nach Kolymbas (3.1) von 1989 getrennt ermittelt werden, da die statischen Spannungen den physikalischen Eigenschaften des Schüttgutes entsprechen müssen und somit gewissen Restriktionen unterliegen. Für das Stoffmodell von Gudehus und von von Wolffersdorff (3.2) von 1994 ist dieses Vorgehen nicht erforderlich, da die Spannungsrestriktionen direkt im Modell implementiert sind. Bei der Entleerungsberechnung mit der FINITE-ELEMENT-METHODE werden sehr kleine Zeitschritte erforderlich, um zu einer Konvergenz des Verfahrens bzw. zu zulässigen Spannungszuständen zu gelangen.

3.6.2 Fluidbeschreibung: Linearer und nichtlinearer Ansatz

In einer ruhenden viskosen Flüssigkeit treten keine Schubspannungen auf. Die Schubspannungen hängen von der zeitlichen Änderung der Verzerrung, also der Deformationsrate \mathbf{D} , ab (Bild 3.10). Man spricht vom NEWTONschen Fluid bei einem **linearen** Zusammenhang zwischen der Schubspannung τ und der Verzerrungsänderung \mathbf{D} . Die Bezeichnung des nicht-NEWTONschen Fluids steht für einen **nichtlinearen** Zusammenhang zwischen Schubspannung und Verzerrungsänderung.

Für die Beschreibung des fließenden Schüttgutes sind in der Literatur beide Ansätze vorgestellt worden. Häußler (1984) und Gladen (1985) stellen einen linearen Ansatz der NEWTONschen Flüssigkeit für die Viskosität unter Ausnutzung der STOKESchen Bedingung vor:

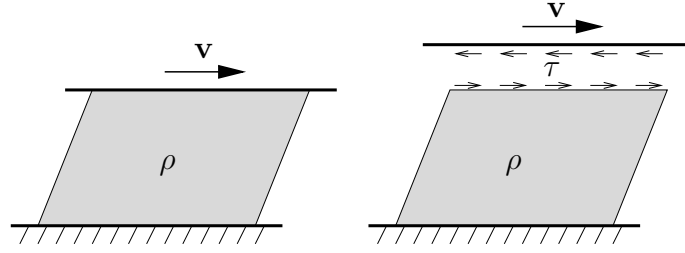


Bild 3.10: Viskoses Fluid mit der Dichte ρ : Scherspannung τ in Folge der Schergeschwindigkeit v

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_v &= 2\mu \mathbf{D}' \\ T_{ij}^{(v)} &= 2\mu D'_{ij} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Stadler und Buggisch (1985) sowie Savage und Sayed (1984) verwenden einen nichtlinearen Ansatz in Analogie zu einer nicht-NEWTONschen Flüssigkeit

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_v &= 2\mu \sqrt{\text{tr}(\mathbf{D}'^2)} \mathbf{D} = \\ &= \frac{2}{3} \mu \sqrt{\text{tr}(\mathbf{D}'^2)} \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} + 2\mu \sqrt{\text{tr}(\mathbf{D}'^2)} \mathbf{D}' \end{aligned} \quad (3.26)$$

In dieser Arbeit wird der dynamische Materialtensor \mathcal{G} aus (3.23) in Analogie zur nicht-NEWTONschen Flüssigkeit (3.26) formuliert

$$\mathcal{G}_{ijkl} = 2\mu \sqrt{\text{tr}(\mathbf{D}'^2)} \cdot (\delta_{ik} \delta_{jl}) = \gamma_{dyn} \cdot (\delta_{ik} \delta_{jl}). \quad (3.27)$$

Es wird der dynamische Materialkoeffizient $\gamma_{dyn} [\text{N}/\text{m}^2]$ mit dem in Kapitel 3.6.3 neu eingeführten dichteabhängigen Viskositätsparameter $\mu [\text{Ns}/\text{m}^2]$ verwendet. Der Deviator der Deformationsrate $\mathbf{D}' = \mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I}$ stellt die Schubverformung bzw. Verzerrungsänderung des Materials dar.

3.6.3 Dichteabhängige Viskosität μ

Entsprechend dem Verhalten von viskosen Materialien wird mit (3.28) eine dichteabhängige Viskosität eingeführt. Hiermit wird der Veränderung der Viskosität im Schüttgut bei starker Auflockerung oder Verdichtung Rechnung getragen. Der Viskositätsparameter μ ist von der momentanen Dichte des Schüttgutes abhängig. So wird die Viskosität im Auslaufbereich bei abnehmender Dichte kleiner und in Verdichtungszone größer. Für die Anfangslagerungsdichte ρ_0 wird aus Versuchen eine Anfangsviskosität μ_0 bestimmt. Im Entleerungsverlauf wird der Parameter μ mittels

$$\mu = \left(\frac{\rho(t)}{\rho_0} \right)^\psi \cdot \mu_0 \quad (3.28)$$

berechnet. Die Dichte ist eine Funktion der Zeit und wird zu jedem Zeitschritt mit $\rho(t)$ ausgedrückt. Der Exponent ψ wie auch die Anfangsviskosität μ_0 sind Materialwerte, die am Experiment kalibriert werden. In Bild 3.11 ist die Funktion (3.28) im Bereich $\rho(t) = 0$ bis $\rho(t) = 1.2\rho_0$ für verschiedene Werte ψ aufgetragen.

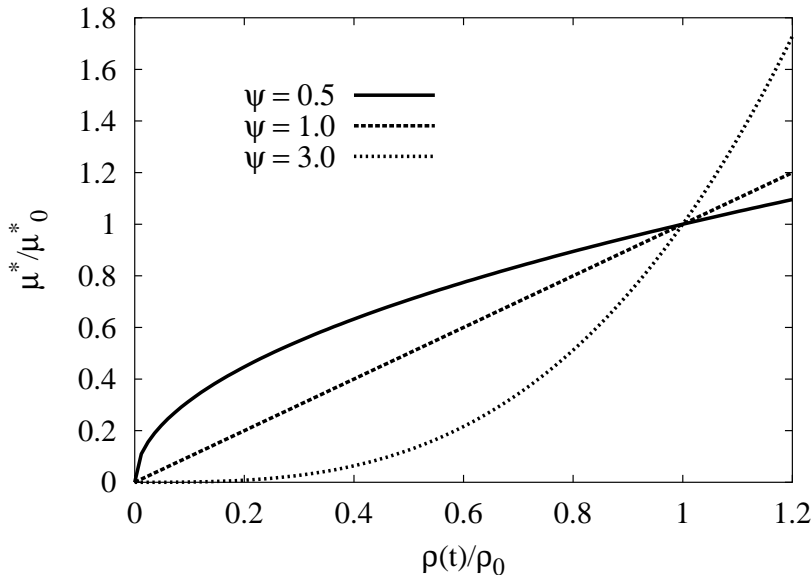


Bild 3.11: Viskositätsparameter μ aus Gleichung (3.28) aufgetragen über dem Dichteverhältnis $\rho(t)/\rho_0$; Einfluss des Exponenten ψ

4 EXPERIMENTELLER AUFBAU

4.1 Experimentalsilos

Am Institut für Mechanische Verfahrenstechnik (IMVT) und am Braunschweiger Siloprüfstand stehen Experimentalsilos zur Verfügung, an denen unterschiedliche messtechnische Instrumente angebracht sind. Es handelt sich um Silos mit rechteckigem Querschnitt und als Schüttgut werden die freifließenden, grobkörnigen Kunststoffgranulate PET (Polyethylenterephthalat), PP (Polypropylen) und PS (Polystyrol) verwendet (siehe Tabelle 3.2).

Die Messung der Wandspannung erfolgt mittels spezieller Messzellen des IMVT. Hierbei werden die Wandnormalspannung, die Wandscherspannung und Momentenspannung, die von schiefer Belastung der Messzelle herrührt, aufgenommen. Zur Aufnahme von Fließprofilen kommt eine CCD-Kamera zum Einsatz (Bild 4.1). Diese Kamera nimmt zeitgleich zu der Spannungsmessung das Schüttgut durch die transparenten Plexiglaswände hindurch auf. Bei der Auswertung der Bilddaten kommen spezielle Verfahren und Computer-Software zum Einsatz, die ein Partikel-Tracking, das Verfolgen von einzelnen Partikeln ermöglicht oder die Particle-Image-Velocimetry Methode, bei der ein Fließprofil im Bildbereich erstellt wird.

1. Der **Stahlsilo** des Siloprüfstandes in Braunschweig hat einen Querschnitt von 800mm x 1200mm und eine Schaftlänge von 5000mm. An diesem Silo können unterschiedliche Trichterneigungen montiert werden. Die Entleerung erfolgt über einen Gurtförderer. Es werden Wandspannungen gemessen.
2. Ein **Modellsilo** aus Plexiglas des IMVT hat einen Querschnitt von 100mm x 200mm und eine Schaftlänge von 1800mm. Es werden Trichterneigungen von 15° und 60° untersucht. Die Entleerung wird hier durch freien Ausfluss des Schüttgutes realisiert. Es werden Fließprofile mittels CCD Kamera aufgenommen.
3. Der **Versuchssilo** des IMVT besteht aus Plexiglas mit einem Stahlrahmen.

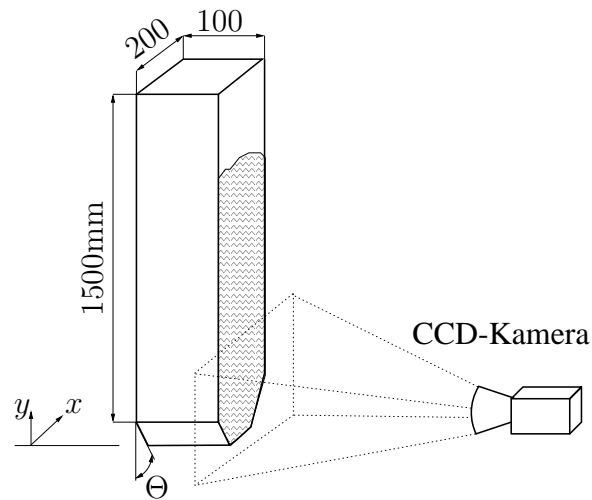


Bild 4.1: CCD-Kamera: Versuchsaufbau für die Messung der Fließprofile

Der Silo hat einen Querschnitt von 400mm x 800mm und eine Schaftlänge von 2300mm (Bild 4.2). Das Wandmaterial Plexiglas mit der Dicke 25mm wird durch eine steife Stahlkonstruktion gestützt. An diesem Silo können beliebige Trichterneigungen in einem Bereich von 90° bis 10° eingestellt werden. Die Entleerung erfolgt über einen Gurtförderer. Der Stahlrahmen ist auf drei Wägebalken (Messposition B1-B3 in Bild 4.2) gelagert. Der Vorratssilo oberhalb der Konstruktion und das Förderband sind vom Testsilo entkoppelt. Es werden Wandnormalspannungen, Wandverformungen und die Gewichtskraft gemessen. Die Fließprofile werden mit der CCD Kamera aufgenommen. Im Füllzustand treten Wandverformungen des Plexiglasses von bis zu 2, 3mm (Bild 5.6) zwischen zwei Stahlprofilen auf. Für die Simulation ist es somit erforderlich, die Wandverformungen zu berücksichtigen. In Bild 5.2 sind die Befestigungspunkte der Plexiglasscheiben am Stahlrahmen durch Auflager gekennzeichnet, siehe (Kapitel 5.5.2).

4.2 Messtechnik

Die Messtechnik nimmt die Wandverformungen mit Wegaufnehmern, die Wandnormalspannungen mit Spannungsmesszellen (Bild 4.2 R1-R8 und L1-L8) und das Geschwindigkeitsfeld mit einer Hochgeschwindigkeitskamera durch die Silowand hindurch auf. Für die Messung der dynamischen Vorgänge ist es erforder-

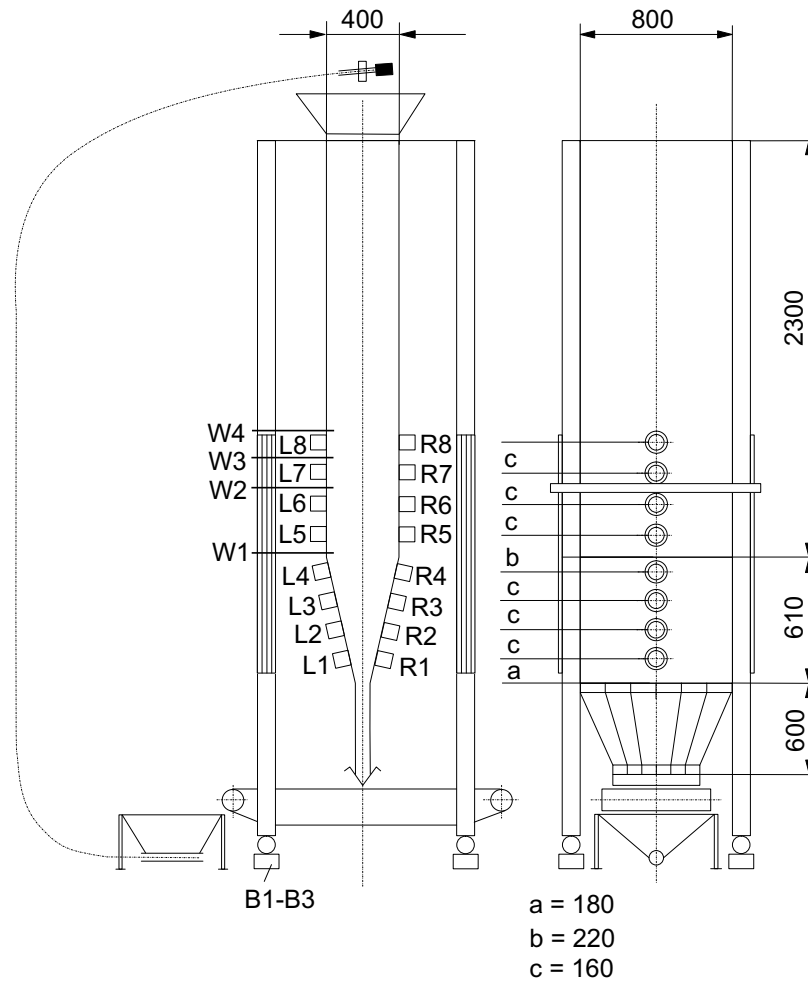


Bild 4.2: Versuchssilo: Konstruktion und Positionen der Spannungsmesszellen R_i , L_i (rechts und links), der Wegaufnehmer W_i und der Wägebalken B_i

lich, hohe Abtastraten und eine möglichst gleichzeitige Messung an allen Stellen zu gewährleisten. Hierzu werden die Messungen der Hochgeschwindigkeitskamera und die Messungen mit den Spannungsmesszellen durch ein Triggersignal synchronisiert. Die Gleichzeitigkeit der Messung an allen Spannungsmesszellen wird durch mehrere Messkarten mit hoher Samplingrate und durch binäres Heraus-schreiben der Daten erreicht.

5 NUMERISCHE UMSETZUNG

Die FINITE-ELEMENT-METHODE (FEM) ist ein numerisches Näherungsverfahren. Es können komplexe Probleme aus dem Ingenieurbereich untersucht werden, für die keine geschlossenen Lösungen angegeben werden können. Die FINITE-ELEMENT-METHODE hat heute eine breite Anwendung gefunden, und es gibt eine Vielzahl kommerzieller Software. Zur Einführung in die Berechnungsmethode sei hier auf die Literatur verwiesen. Grundlagen und Herleitung der Methode finden sich beispielsweise in Zienkiewicz (1984), Bathe (1990) und Dinkler und Ahrens (1994).

Im folgenden werden die Zusammenhänge gezeigt, die im FINITE-ELEMENT-METHODE Berechnungsprogramm SILO zur Anwendung kommen. Zunächst werden die Gleichgewichtsbedingungen formuliert und anschließend wird die Implementierung des Stoffmodells (3.2) von Gudehus und von von Wolffersdorff 1996 vorgestellt.

5.1 Aufstellen des Gleichungssystems

5.1.1 Zusammenstellung der Gleichungen

Zur besseren Lesbarkeit werden die verwendeten Gleichungen hier noch einmal zusammengefasst:

1. Dynamisches Gleichgewicht (2.3)

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho(x, t)(\mathbf{b} - \dot{\mathbf{v}}) = 0 \quad (5.1)$$

2. Materielle Ableitung der Relativgeschwindigkeit (2.4)

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (5.2)$$

3. Kontinuitätsgleichung (2.5)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (5.3)$$

4. Kinematische Beziehungen

(a) Geschwindigkeitsgradienten (2.6)

$$\mathbf{L} = \mathbf{v} \nabla = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (5.4)$$

(b) Deformationsrate (symmetrisch) (2.8)

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}^s = \frac{\mathbf{L} + \mathbf{L}^T}{2} = \frac{\mathbf{v} \nabla + \nabla \mathbf{v}}{2} \quad (5.5)$$

(c) Rotationsrate (unsymmetrisch) (2.9)

$$\mathbf{W} = \mathbf{L}^u = \frac{\mathbf{L} - \mathbf{L}^T}{2} = \frac{\mathbf{v} \nabla - \nabla \mathbf{v}}{2} \quad (5.6)$$

5. Verformungsbeschleunigung (2.10)

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} + \dot{\mathbf{D}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{W}. \quad (5.7)$$

5.1.2 Integrale Darstellung

Die schwache Form der Bewegungsgleichung (5.1) ist im Gebiet Ω erfüllt, wenn mit der Variation der Geschwindigkeiten $\delta \mathbf{v}$ als Wichtungsfunktion gilt:

$$\int_{\Omega} [\rho(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{b}) - \nabla \cdot \mathbf{T}] \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega = 0 \quad (5.8)$$

Das Gebiet Ω ist der Innenraum des Silos, der mit Schüttgut gefüllt ist. Die Randbedingungen sind zum einen an den Wänden und an der Auslauföffnung Γ_v die vorgegebenen Geschwindigkeiten und zum anderen an der freien Oberfläche Γ_f die Spannungsrandbedingungen. Die Wichtungsfunktionen bzw. die Geschwindigkeitsfelder, die zur Lösung zugelassen sind, müssen die kinematischen Randbedingungen erfüllen. Daher sind die Komponenten von $\delta \mathbf{v}$ auf der Berandung Γ_v im Bereich der Wandelemente gleich 0:

$$\delta \mathbf{v} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_v. \quad (5.9)$$

Um eine Formulierung zu finden, in der die Spannungen und die Geschwindigkeiten miteinander gekoppelt sind, wird zunächst aus der Gleichung (5.8) das Volumenintegral $\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{T} d\Omega$ mit Hilfe des GAUSSschen Satzes und der Produktregel in

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{T} d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{T} : \delta(\nabla \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_f \cdot \delta \mathbf{v} d\Gamma_f + \underbrace{\int_{\Gamma_k} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_k \cdot \delta \mathbf{v} d\Gamma_k}_{=0 \text{ mit (5.9)}} \quad (5.10)$$

überführt. Dabei bezeichnet \mathbf{n} die Randnormale, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_f = \mathbf{f}_{\Gamma}$ die vorgegebene Last auf Γ_f und $\Gamma_v + \Gamma_f = \Gamma$ den gesamten Rand des Gebietes Ω .

Für das verbleibende Randintegral aus Gleichung (5.10) kann man auch einfacher schreiben:

$$\int_{\Gamma_f} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_f \cdot \delta \mathbf{v} d\Gamma = \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}_{\Gamma} \cdot \delta \mathbf{v} d\Gamma_f. \quad (5.11)$$

Da die Variation des Rotationsratentensors keinen Einfluss auf den Spannungstensor hat, gilt der Zusammenhang:

$$\mathbf{T} : \delta \mathbf{W} = 0. \quad (5.12)$$

Somit kann mit (5.12) und der Formulierung des Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} aus (5.4) für den Integranden $\mathbf{T} : \delta(\nabla \mathbf{v})$ der Integralgleichung (5.10) wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbf{T} : \delta(\nabla \mathbf{v}) = \mathbf{T} : \delta \mathbf{D}. \quad (5.13)$$

Werden (5.11) und (5.13) in (5.8) eingesetzt, so erhält man den Ausdruck:

$$\int_{\Omega} \rho(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{T} : \delta \mathbf{D} d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}_{\Gamma} \cdot \delta \mathbf{v} d\Gamma_f = 0. \quad (5.14)$$

Mit der materiellen Zeitableitung $\dot{\mathbf{v}}$ nach (5.2) erhält man aus (5.14) die folgende Gleichung, die die Impulsbilanz darstellt:

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : \delta \mathbf{D} d\Omega + \rho \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega = \rho \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}_{\Gamma} \cdot \delta \mathbf{v} d\Gamma_f. \quad (5.15)$$

Die Gleichung (5.15) wird mit der FINITE-ELEMENT-METHODE gelöst (siehe Kapitel 5.2).

5.2 Lösen des Gleichungssystems mit der FEM

Damit die Rechenregeln der Matrizenalgebra angewendet werden können, wird folgende Schreibweise eingeführt:

$$\begin{array}{ll} \text{Vektor} & \longrightarrow \text{Vektor (Tensor 1. Stufe)} \\ \text{Tensor 2. Stufe} & \longrightarrow \text{Tensor 1. Stufe} \\ \text{Tensor 4. Stufe} & \longrightarrow \text{Tensor 2. Stufe.} \end{array}$$

Die Indizierung ist im Anhang A.2.2 zu finden.

Die Gleichung (5.15) aus dem Abschnitt 5.1.2 kann mit diesen Vereinbarungen in der Form

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{T} d\Omega + \rho \int_{\Omega} \delta \mathbf{v}^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) d\Omega = \rho \int_{\Omega} \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{f}_{\Gamma} d\Gamma_f \quad (5.16)$$

geschrieben werden.

Das zu untersuchende Gebiet Ω wird bei der FINITE-ELEMENT-METHODE (FEM) in endlich viele Elemente aufgeteilt. Die Gleichung (5.16) wird auf Elementebene berechnet. Im Element werden die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ mittels eines Produktansatzes der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ mit den Freiwerten $\mathbf{v}_k(t)$ approximiert:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{v}_k(t) \quad (5.17)$$

mit:

- $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)$ Lösungsvektor der Geschwindigkeiten im EULERSchen Bezugssystem
- $\mathbf{v}_k(t)$ Geschwindigkeitsvektor der räumlich festen Elementknoten
- $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ Matrix der Ansatz- bzw. Formfunktionen

Als unbekannte Werte treten hier die Knotengeschwindigkeiten \mathbf{v}_k auf. Die Ansatz- bzw. Formfunktionen in $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ müssen für jeden Elementtyp geeignet gewählt werden und ausreichende Differenzierbarkeit gewährleisten (Rombach (1991)). So müssen die Ansatzfunktionen, die in der Regel Polynome sind, Kontinuität der Geschwindigkeiten und Deformationen an den Elementrändern gewährleisten, damit eine Konvergenz der Berechnung erreicht wird. Mit den Ansatzfunktionen wird der Lösungsraum festgelegt.

Sollen die Deformationsrate und die Rotationsrate im Lösungsraum dargestellt werden, muss \mathbf{v} aus (5.17) entsprechend der Vorgaben aus den Gleichungen (5.5) und (5.6) nach dem Ort differenziert werden. Es entstehen die beiden Ausdrücke

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}, t) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{X})\nabla + \nabla\mathbf{N}(\mathbf{X})}{2} \cdot \mathbf{v}_k(t) = \mathbf{B}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{v}_k(t) \quad (5.18)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{X}, t) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{X})\nabla - \nabla\mathbf{N}(\mathbf{X})}{2} \cdot \mathbf{v}_k(t) = \mathbf{R}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{v}_k(t) \quad (5.19)$$

mit der sogenannten Verzerrungsmatrix $\mathbf{B}(\mathbf{X})$ und der Rotationsmatrix $\mathbf{R}(\mathbf{X})$.

Werden die Variationen der Geschwindigkeit $\delta\mathbf{v}$ und der Deformationsrate $\delta\mathbf{D}$ aus Gleichung (5.16) im Lösungsraum der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ mit den Knotengeschwindigkeiten $\mathbf{v}_k(t)$ dargestellt, entsteht die Gleichung

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{v}_k^T \cdot \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{T} d\Omega + \rho \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} d\Omega \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial t} + \rho \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{v} \nabla \mathbf{N} d\Omega \cdot \mathbf{v}_k \right) = \\ \delta\mathbf{v}_k^T \cdot \left(\rho \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{f}_{\Gamma} d\Gamma_f \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Die Integralausdrücke aus Gleichung (5.20) werden durch Abkürzungen, denen eine physikalische Bedeutung zugeordnet werden kann, ausgedrückt. Somit ergibt sich das Kräftegleichgewicht zu:

$$\mathbf{f} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial t} + \mathbf{M}_{\nabla} \cdot \mathbf{v}_k = \mathbf{p} \quad (5.21)$$

mit den Abkürzungen:

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{T} d\Omega \quad \text{Vektor der inneren Knotenkräfte} \quad (5.22)$$

$$\mathbf{M} = \rho \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} d\Omega \quad \text{konsistente Massenmatrix} \quad (5.23)$$

$$\mathbf{M}_{\nabla} = \rho \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{N} d\Omega \quad \text{konvektive Massenmatrix} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = & \rho \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega \quad \text{Vektor der Volumen- und} \\ & + \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{f}_{\Gamma} d\Gamma_f \quad \text{Oberflächenlasten} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Für die zeitliche Integration wird ein implizites EULER-Verfahren eingesetzt. Die partielle Ableitung $\partial \mathbf{v}_k / \partial t$ aus Gleichung (5.21) wird durch den Differenzenquotienten $(\mathbf{v}_k^{t+\Delta t} - \mathbf{v}_k^t) / \Delta t$ mit dem Zeitinkrement $\Delta t = t^{t+\Delta t} - t^t$ ersetzt.

$$\frac{\mathbf{v}_k^{t+\Delta t} - \mathbf{v}_k^t}{\Delta t} = -(\mathbf{M}^{t+\Delta t})^{-1} \cdot (\mathbf{M}_{\nabla}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{v}_k^{t+\Delta t} + \mathbf{f}^{t+\Delta t} - \mathbf{p}^{t+\Delta t}). \quad (5.26)$$

Mit Hilfe der Gleichung (3.24), in der die CAUCHYsche Spannung unter Einbeziehung des Stoffmodells und der geometrisch nichtlinearen Formulierung dargestellt wird, kann der Vektor der unbekannten inneren Knotenkräfte berechnet werden. In Gleichung (3.24) wird die partielle Ableitung der Deformationsrate durch den Vorwärtsdifferenzenquotienten 1. Ordnung ersetzt. Unter Berücksichtigung der Formulierung (5.18) im Lösungsraum der Ansatzfunktionen und dem darin eingesetzten Differenzenquotienten ergibt sich

$$\frac{\mathbf{D}^{t+\Delta t} - \mathbf{D}^t}{\Delta t} = \mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{v}_k^{t+\Delta t} - \mathbf{v}_k^t}{\Delta t}. \quad (5.27)$$

Die Spannung des Zeitschrittes $t + \Delta t$ kann wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbf{T}^{t+\Delta t} = \mathbf{T}^t + \Delta t (\mathcal{H}^{t+\Delta t} : \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_k^{t+\Delta t} + \mathbf{l}_n^{t+\Delta t}) + \mathcal{G}^{t+\Delta t} : \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v}_k^{t+\Delta t} - \mathbf{v}_k^t) \quad (5.28)$$

mit der Abkürzung \mathbf{l}_n für den geometrisch nichtlinearen Anteil aus Gleichung (3.24):

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_n^{t+\Delta t} = & \mathbf{T}^t : \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_k^{t+\Delta t} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_k^{t+\Delta t} : \mathbf{T}^t + \mathbf{v}_k^{t+\Delta t} \cdot \nabla \mathbf{T}^t \\ & + \mathcal{G}^{t+\Delta t} : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_k^{t+\Delta t} : \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_k^{t+\Delta t} \\ & - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_k^{t+\Delta t} : \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_k^{t+\Delta t} + \mathbf{v}_k^{t+\Delta t} \cdot \nabla \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_k^{t+\Delta t}) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Multipliziert man Gleichung (5.28) von links mit der Verzerrungsmatrix \mathbf{B}^T und führt die Integration über das Gebiet Ω aus, so erhält man einen Ausdruck für die unbekannten inneren Knotenkräfte in Abhängigkeit der Knotengeschwindigkeiten \mathbf{v}_k :

$$\mathbf{f}^{t+\Delta t} = \mathbf{f}_l^t + \Delta t (\mathbf{K}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{v}_k^{t+\Delta t} + \mathbf{f}_n^{t+\Delta t}) + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \cdot (\mathbf{v}_k^{t+\Delta t} - \mathbf{v}_k^t) \quad (5.30)$$

mit den Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathcal{H} : \mathbf{B} d\Omega && \text{Steifigkeitsmatrix} \\ \mathbf{C} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathcal{G} : \mathbf{B} d\Omega && \text{Viskositäts- oder Dämpfungsmatrix} \\ \mathbf{f}_n &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{l} d\Omega && \text{Kräfte aus geom. nichtlinearer Formulierung} \\ \mathbf{f}_l &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{T} d\Omega && \text{Kräfte aus linearer Formulierung.} \end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (5.26) und (5.30) ergibt sich das Kräftegleichgewicht zu:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{v}_k, t + \Delta t) &= \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}^{t+\Delta t} + \mathbf{M}_{\nabla}^{t+\Delta t} + \Delta t \mathbf{K}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \right) \cdot \mathbf{v}_k^{t+\Delta t} \\ &\quad + \Delta t \mathbf{f}_n^{t+\Delta t} - \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{C}^{t+\Delta t} \right) \mathbf{v}_k^t + \mathbf{f}_l^t - \mathbf{p}^{t+\Delta t} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

Zunächst wird die Gleichung (5.31) bis zum ersten Glied in eine TAYLOR-Reihe entwickelt. Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems wird ein modifiziertes *Newton-Raphson-Verfahren* gewählt. Beim *Newton-Raphson-Verfahren* wird bei jedem Iterationsschritt die Steigung neu berechnet Bild 5.1-a, was bei geeignetem Startwert eine quadratische Konvergenz bewirkt. Da es aufwendig ist, die Steifigkeitsmatrix in jedem Iterationsschritt neu zu berechnen, wird auf das modifizierte *Newton-Raphson-Verfahren* zurückgegriffen. Wie in Bild 5.1-b zu erkennen ist, wird beim modifizierten Verfahren mit der Steigung aus dem ersten Berechnungsschritt gerechnet. Das Verfahren verliert die quadratische und erreicht nur noch lineare Konvergenz, so dass beim modifizierten *Newton-Raphson-Verfahren* eine größere Anzahl Iterationsschritte benötigt werden. Im FINITE-ELEMENT-METHODE Berechnungsprogramm SILO werden während der Iteration die Veränderung der konvektiven Terme der Massenmatrix \mathbf{M}_{∇} , der geometrisch nichtlinearen Terme \mathbf{l}_n , sowie die Veränderung des Lastvektors \mathbf{p} vernachlässigt (siehe hierzu Rombach (1991)). Die Qualität der Konvergenz wird verschlechtert, der Rechenaufwand insgesamt verringert sich jedoch. Der Startvektor

für die Iteration wird aus den Werten des vorhergehenden Zeitschrittes linear extrapoliert.

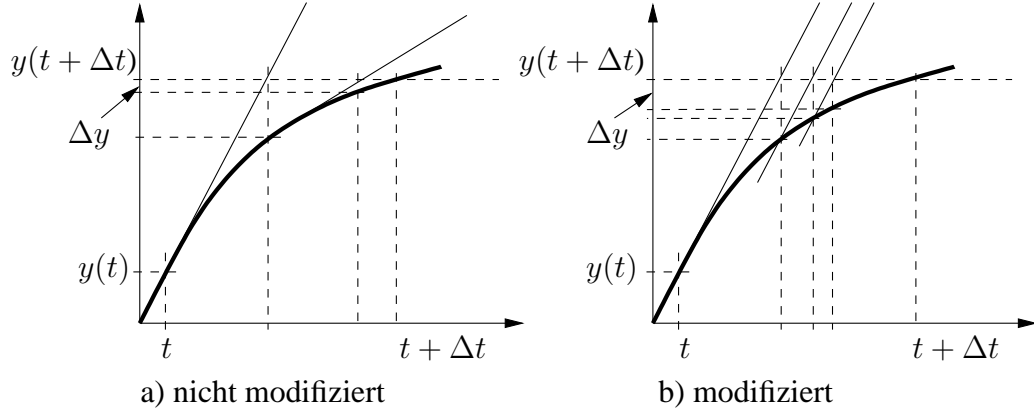


Bild 5.1: *Newton-Raphson-Verfahren*: Näherung Δy nach zwei Iterationen in a) besser als in b) nach drei Iterationen

5.3 Massenerhaltung

Zur Berücksichtigung der Massenerhaltung wird die Gleichung (2.5) herangezogen. Nimmt man an, dass die Dichte ρ im Gebiet Ω gleich ist, ergibt sich nach dem Satz von GAUSS:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] d\Omega = \Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \oint_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = 0. \quad (5.32)$$

Die zeitliche Ableitung der Dichte $\partial \rho / \partial t$ wird durch den Differenzenquotienten $(\rho^{t+\Delta t} - \rho^t) / \Delta t$ ersetzt, so dass die Dichte zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ nach

$$\rho^{t+\Delta t} = \rho^t \left(1 - \frac{\Delta t}{\Omega} \oint_{\Gamma} v_n^t d\Gamma \right) \quad (5.33)$$

berechnet werden kann. Hier bezeichnet v_n^t die Geschwindigkeit normal zum Rand $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ zum Zeitpunkt t . Das Oberflächenintegral in Gleichung (5.33) kann bei den im Programm SILO verwendeten isoparametrischen Finiten-Elementen (siehe Rombach (1991)) auf Elementebene mit den lokalen Ableitungen der Formfunktionen berechnet werden. Daher muss die Integration für jeden Elementtyp nur einmal durchgeführt werden.

5.4 Bestimmung der Stoffmatrix

Für eine Implementierung des Modells von Gudehus und von von Wolffersdorff (Gleichung (3.2)) in das Berechnungsprogramm SILO muss eine Abspaltung der Deformationsrate \mathbf{D} erfolgen. Die Gleichung (3.2) bzw. der quasistatische Teil aus Gleichung (3.23) lässt sich in drei Teile zerlegen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{T}}_s &= \mathcal{H} : \mathbf{D} \\ &= \underbrace{f_b f_e \frac{1}{\text{tr}(\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}})} F^2 \mathbf{D}}_{\text{1. Term}} + \underbrace{f_b f_e \frac{1}{\text{tr}(\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}})} a^2 \hat{\mathbf{T}} \text{tr}(\hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D})}_{\text{2. Term}} + \underbrace{f_d a F (\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}') ||\mathbf{D}||}_{\text{3. Term}}.\end{aligned}\quad (5.34)$$

Bei der Abspaltung der Deformationsrate von den drei Termen entsteht jeweils ein Produkt mit drei Faktoren:

1. Ein Skalar C_i , der vom Spannungszustand des vorherigen Berechnungsschrittes abhängt
2. Stoffmatrizen \mathbf{H}_i
3. Deformationsrate \mathbf{d} (zur Schreibweise siehe Kapitel A.2.2).

Hier werden wiederum die Tensoren 2. Stufe als Vektoren und Tensoren 4. Stufe als Matrizen geschrieben (Umformungen siehe Kapitel A.2.2), damit die Rechenregeln der Matrizenalgebra angewendet werden können.

Die Spannungsrate $\dot{\mathbf{T}}$ aus (5.34) kann im Produkt mit der Deformationsrate \mathbf{d} folgendermaßen dargestellt werden:

$$\dot{\mathbf{T}} = \sum_{i=1}^3 (C_i \mathbf{H}_i) \cdot \mathbf{d} = (C_1 \mathbf{H}_1 + C_2 \mathbf{H}_2 + C_3 \mathbf{H}_3) \cdot \mathbf{d}. \quad (5.35)$$

Dabei werden die Stoff- oder Steifigkeitsmatrizen \mathbf{H}_i mit den Gleichungen (5.37) bis (5.39) bestimmt. Die Gesamtstoffmatrix erhält man aus der Summation der

drei Terme aus (5.35):

$$\mathcal{H} \hat{=} \sum_{i=1}^3 C_i \mathbf{H}_i. \quad (5.36)$$

Für die einzelnen Terme aus Gleichung (5.34) gilt:

- 1. Term:

$$f_b f_e \frac{1}{tr(\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}})} F^2 \mathbf{d} = C_1 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{d} \quad (5.37)$$

mit:

$$C_1 = \frac{f_b f_e}{tr(\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}})} \quad , \quad \mathbf{d}^T = (d_{11}, \quad d_{12}, \quad d_{22}, \quad d_{33}, \quad d_{23}, \quad d_{13})$$

$$\mathbf{H}_1 = F^2 I$$

$$I = \text{Einheitstensor 4. Stufe}$$

$$F = \text{skalare Funktion} \quad (\text{siehe Gleichung 3.5})$$

- 2. Term:

$$f_b f_e \frac{1}{tr(\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}})} a^2 \hat{\mathbf{T}} tr(\hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}) = C_2 \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{d} \quad (5.38)$$

mit:

$$C_2 = \frac{f_b f_e a^2}{tr(\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}})} \quad , \quad \mathbf{d} = (d_{11}, \quad d_{12}, \quad d_{22}, \quad d_{33}, \quad d_{23}, \quad d_{13})$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \hat{T}_{11}\hat{T}_{11} & 2\hat{T}_{12}\hat{T}_{11} & \hat{T}_{22}\hat{T}_{11} & \hat{T}_{33}\hat{T}_{11} & 2\hat{T}_{23}\hat{T}_{11} & 2\hat{T}_{13}\hat{T}_{11} \\ \hat{T}_{11}\hat{T}_{12} & 2\hat{T}_{12}\hat{T}_{12} & \hat{T}_{22}\hat{T}_{12} & \hat{T}_{33}\hat{T}_{12} & 2\hat{T}_{23}\hat{T}_{12} & 2\hat{T}_{13}\hat{T}_{12} \\ \hat{T}_{11}\hat{T}_{22} & 2\hat{T}_{12}\hat{T}_{22} & \hat{T}_{22}\hat{T}_{22} & \hat{T}_{33}\hat{T}_{22} & 2\hat{T}_{23}\hat{T}_{22} & 2\hat{T}_{13}\hat{T}_{22} \\ \hat{T}_{11}\hat{T}_{33} & 2\hat{T}_{12}\hat{T}_{33} & \hat{T}_{22}\hat{T}_{33} & \hat{T}_{33}\hat{T}_{33} & 2\hat{T}_{23}\hat{T}_{33} & 2\hat{T}_{13}\hat{T}_{33} \\ \hat{T}_{11}\hat{T}_{23} & 2\hat{T}_{12}\hat{T}_{23} & \hat{T}_{22}\hat{T}_{23} & \hat{T}_{33}\hat{T}_{23} & 2\hat{T}_{23}\hat{T}_{23} & 2\hat{T}_{13}\hat{T}_{23} \\ \hat{T}_{11}\hat{T}_{13} & 2\hat{T}_{12}\hat{T}_{13} & \hat{T}_{22}\hat{T}_{13} & \hat{T}_{33}\hat{T}_{13} & 2\hat{T}_{23}\hat{T}_{13} & 2\hat{T}_{13}\hat{T}_{13} \end{bmatrix}$$

- 3. Term:

$$f_d a F (\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}') ||\mathbf{D}|| = \frac{f_d a F}{\sqrt{\mathbf{D} : \mathbf{D}}} (\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}') \mathbf{D} : \mathbf{D} = C_3 \mathbf{H}_3 \cdot \mathbf{d} \quad (5.39)$$

mit:

$$C_3 = \frac{f_d a F}{\sqrt{\mathbf{D} : \mathbf{D}}} \quad , \quad \mathbf{d} = (d_{11}, \quad d_{12}, \quad d_{22}, \quad d_{33}, \quad d_{23}, \quad d_{13}) \quad ,$$

$$\overset{\Sigma}{T}_{ij} = \hat{T}_{ij} + \hat{T}'_{ij}$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} \overset{\Sigma}{T}_{11} D_{11} & \overset{\Sigma}{2T}_{11} D_{12} & \overset{\Sigma}{T}_{11} D_{22} & \overset{\Sigma}{T}_{11} D_{33} & \overset{\Sigma}{2T}_{11} D_{23} & \overset{\Sigma}{2T}_{11} D_{13} \\ \overset{\Sigma}{T}_{12} D_{11} & \overset{\Sigma}{2T}_{11} D_{12} & \overset{\Sigma}{T}_{12} D_{22} & \overset{\Sigma}{T}_{11} D_{33} & \overset{\Sigma}{2T}_{12} D_{23} & \overset{\Sigma}{2T}_{11} D_{13} \\ \overset{\Sigma}{T}_{22} D_{11} & \overset{\Sigma}{2T}_{22} D_{12} & \overset{\Sigma}{T}_{22} D_{22} & \overset{\Sigma}{T}_{22} D_{33} & \overset{\Sigma}{2T}_{22} D_{23} & \overset{\Sigma}{2T}_{22} D_{13} \\ \overset{\Sigma}{T}_{33} D_{11} & \overset{\Sigma}{2T}_{33} D_{12} & \overset{\Sigma}{T}_{33} D_{22} & \overset{\Sigma}{T}_{33} D_{33} & \overset{\Sigma}{2T}_{33} D_{23} & \overset{\Sigma}{2T}_{33} D_{13} \\ \overset{\Sigma}{T}_{23} D_{11} & \overset{\Sigma}{2T}_{23} D_{12} & \overset{\Sigma}{T}_{23} D_{22} & \overset{\Sigma}{T}_{23} D_{33} & \overset{\Sigma}{2T}_{23} D_{23} & \overset{\Sigma}{2T}_{23} D_{13} \\ \overset{\Sigma}{T}_{13} D_{11} & \overset{\Sigma}{2T}_{13} D_{12} & \overset{\Sigma}{T}_{13} D_{22} & \overset{\Sigma}{T}_{13} D_{33} & \overset{\Sigma}{2T}_{13} D_{23} & \overset{\Sigma}{2T}_{13} D_{13} \end{bmatrix}$$

Aus dem Spannungs- und Verzerrungszustand des vorherigen Berechnungsschrittes werden die Konstanten C_1 bis C_3 , die druck- und porenzahlabhängigen Faktoren $f_b f_d f_e$ (3.7)-(3.10) und die skalare Spannungsfunktion $F = F(\mathbf{T})$ (3.5) berechnet.

5.5 Randbedingungen

5.5.1 Geschwindigkeit am Auslass

Bei dem Versuchssilo (Kapitel 4.1) des Instituts für Mechanische Verfahrenstechnik (IMVT) wird die Abzugsgeschwindigkeit des Schüttgutes durch ein Förderband geregelt (siehe Bild 5.2). Der Abstand zwischen der Öffnung des Silos

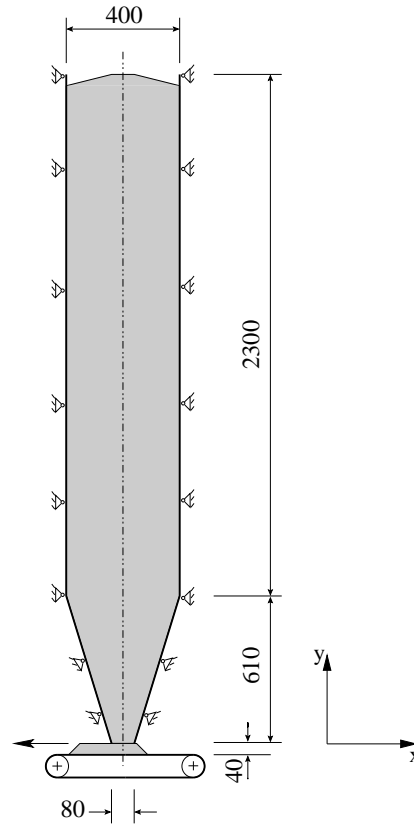


Bild 5.2: Der experimentelle Aufbau des Silos

und dem Förderband beträgt 40mm. Die Auslaufgeschwindigkeit des Schüttgutes kann durch die Förderbandgeschwindigkeit im Bereich von 0.01m/s bis 0.1m/s geregelt werden.

Im Berechnungsprogramm SILO wird die Geschwindigkeit als Randbedingung am Auslauf vorgegeben. Die Öffnungsperiode, in der die Geschwindigkeit von Null bis auf den maximalen Wert hochgefahren wird, beträgt in den verwendeten Beispielen $\Delta t = 0.2\text{s}$. Diese Öffnungsperiode ergibt sich aus dem Rechenzeitaufwand und der Forderung, dass das Öffnen nicht mit einer höheren Beschleunigung als der Erdbeschleunigung erfolgen darf. Es ergibt sich die Öffnungsbeschleunigung $a_{\text{öff}}$ bei $v_{\text{max}} = 0.01\text{m/s}$ zu:

$$a_{\text{öff}} = \frac{v_{\text{max}}}{\Delta t} = \frac{0.01 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.2 \frac{\text{s}}{\text{s}^2}} = 0.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} < 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = g \quad (5.40)$$

und bleibt damit deutlich unterhalb der Erdbeschleunigung g . Bei einer Zeitschrittweite von 10^{-4} s werden 2000 Zeitschritte benötigt. Vergleichsrechnungen haben ergeben, dass ein möglichst stetiger Anstieg der Geschwindigkeit erfolgen sollte, und dass eine horizontale Tangente zum Entleerungsbeginn und beim Erreichen der maximalen Geschwindigkeit nötig ist. Hierfür eignet sich besonders eine e -Funktion, in der Literatur findet sich die SIGMOID-Funktion:

$$y = \min + \frac{\max - \min}{1 + e^{(mid-x)/m}}. \quad (5.41)$$

Mit der Gleichung (5.41) kann die e -Funktion zwischen den Werten \min und \max ($mid = \frac{\min + \max}{2}$) mit der Steigung m angepasst werden (siehe Bild 5.3).

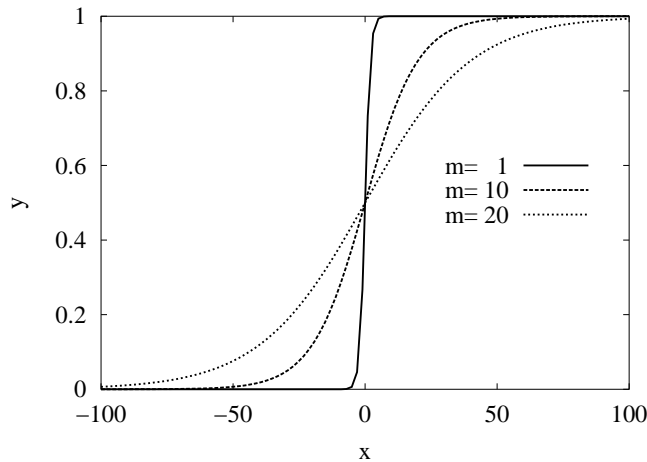


Bild 5.3: Die SIGMOID-Funktion aus Gleichung (5.41): Verlauf für verschiedene m mit $\min = 0$ und $\max = 1.0 \Rightarrow y = (1 + e^{(0.5-x)/m})^{-1}$

Zu Beginn des Öffnens und beim Erreichen der maximalen Geschwindigkeit sind jeweils horizontale Tangenten vorhanden. Die Öffnungsgeschwindigkeit wird mit dieser Funktion zwischen den Werten Null und Eins geregelt. Die Simulation reagiert empfindlich auf Unstetigkeiten oder Sprünge beim *Hochfahren* der Auslassgeschwindigkeit. Daher ist es wichtig, dass genügend Zeitschritte verwendet werden, die die horizontalen Tangenten abbilden. Da die SIGMOID-Funktion stetig ist, ist die Simulation gegenüber der Steilheit des Anstiegs unempfindlich. Eine mittlere Steilheit mit $m = 10$ hat sich bewährt.

Die Geschwindigkeitsverteilung am Auslass über die Auslaufbreite muss vorgegeben werden. Vergleichsrechnungen haben ergeben, dass sich infolge der Rei-

bung die Geschwindigkeit des ausfließenden Schüttgutes zur Wand hin auf 91,5% reduziert. Wird die Geschwindigkeit am Rand zu hoch vorgegeben, kommt es zu unzulässigen Zugspannungen in den Elementen und zu Konvergenzproblemen der Simulationsrechnung. In Bild 5.4 sind drei Funktionen dargestellt, die mögliche Geschwindigkeitsverteilungen am Auslass darstellen. Die SIGMOID-Funktion hat sich hier am vorteilhaftesten erwiesen. Die Funktion (Bild 5.4) gewährleistet eine horizontale Tangente in der Symmetrieachse und einen zur Wand hin stetig abnehmenden Geschwindigkeitsverlauf.

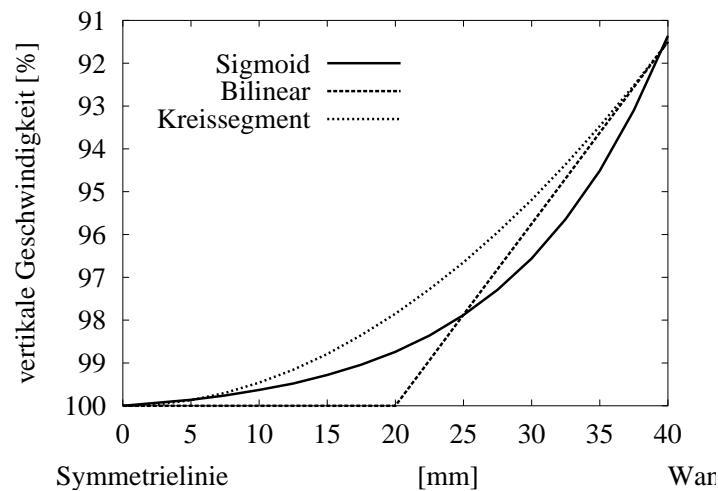


Bild 5.4: Geschwindigkeitsverteilung am Auslass: In der Symmetrie ($x = 0\text{mm}$) 100%, am Rand ($x = 40\text{mm}$) 91,5% der maximalen Auslassgeschwindigkeit vorgegeben. Vergleich von verschiedenen Funktionen

5.5.2 Wandelemente

Die Silowand besteht aus Plexiglasplatten, die auf einem Rahmen aus Stahlprofilen befestigt sind (Bild 5.5-a). Es kann von einer festen Lagerung der Plattenränder ausgegangen werden. Für die Simulation in 2-D wird die Platte auf einen Balken reduziert (Bild 5.5-b). Vergleichsrechnungen zeigen, dass die Verformung der Plexiglasscheibe in der Silomittelachse durch das Tragverhalten eines Balkens angenähert werden kann.

Balkenelemente in 2-D haben neben zwei Verschiebungsfreiheitsgraden einen zusätzlichen Verdrehungsfreiheitsgrad, der für die Beschreibung des Schüttgutver-

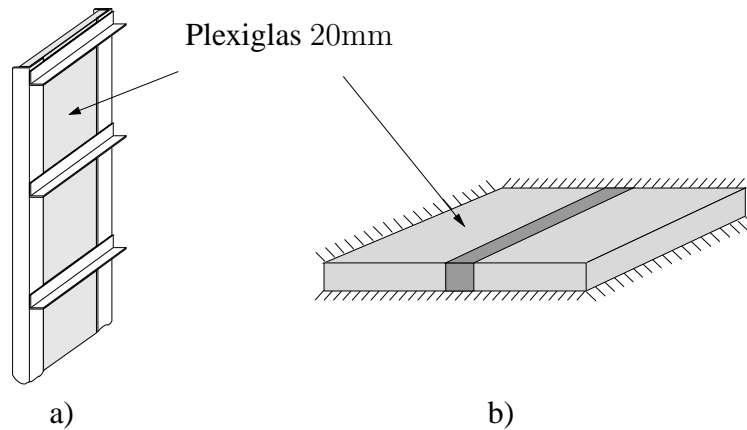


Bild 5.5: a) Wandaufbau: Plexiglas mit Stahlprofilrahmen b) Reduktion: Eingespannte Platte approximiert durch eingespannten Balken

haltens nicht verwendet wird. Nach Zienkiewicz (1984) bilden 8-Knoten Elemente unter Verwendung einer 4x4 GAUSS-Integration das Tragverhalten eines Balkens mit einer Genauigkeit von über 90% zur exakten Lösung ab. Vergleichsrechnungen mit dem FINITE-ELEMENT-METHODE Programm SILO haben ergeben, dass die Verformung eines eingespannten Balkens mit Einzellast am freien Ende auf diese Weise mit einer Genauigkeit von ca. 95% zu der exakten Lösung berechnet wird. So kann hier auf die Verwendung von Balkenelementen und einer Koppelung von Verdrehungsfreiheitsgraden mit Geschwindigkeitsfreiheitsgraden verzichtet werden.

Die Wandelemente werden durch isoparametrische Finite-Elemente mit acht Knoten und elastischem Stoffmodell approximiert. Die Bestimmung des notwendigen Elastizitätsmoduls der Wandelemente erfolgt durch Kalibrierung am Experiment. Die Simulationsergebnisse des Füllzustandes (Bild 5.6) werden mit den Messungen der Silowandverformung verglichen und der Elastizitätsmodul der Wandelemente (Tabelle 5.1) wird in der Art angepasst, dass die berechneten und gemessenen Werte übereinstimmen.

Der Wert für den Elastizitätsmodul der Wandelemente in der Simulation ist ca. 10^3 fach größer (Tabelle 5.1) als der Wert für reales Plexiglas. Dies ist durch die Reduktion des 3-D Wandaufbaus (Bild 5.5) auf die 2-D Simulation (Bild 5.6) zu erklären.

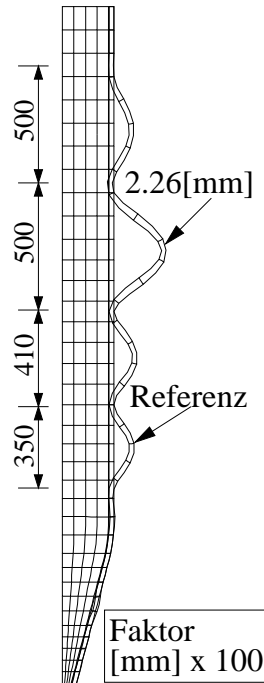


Bild 5.6: Elastische Wandverformung im Füllzustand: Anpassen des E-Moduls in der 2-D Simulation an das 3-D Experiment

Materialwerte Schüttgut	d_{50} [mm]	ρ_b [kg/m ³]	φ_c [°]	φ_w [°]	λ [—]
PET Granulat	3.05	950	28	15	0.41
Wandmaterial FEM-Simulation	E^* [N/mm ²]	ρ [kg/m ³]	ν [—]	d [mm]	
Plexiglasplatten	$2.6 \cdot 10^6$	1700	0.29	20	

Tabelle 5.1: Materialwerte des Schüttgutes und Materialwerte der Wandelemente für die Simulation: Anpassen des Elastizitätsmoduls der Plexiglas-elemente in der Simulation

6 ERGEBNISSE: BEOBACHTUNGEN, BERECHNUNGEN UND MESSUNGEN

Aus Beobachtungen zum Siloschlagen des Stahlsilos am Braunschweiger Siloprüfstand werden Rückschlüsse auf die Vorgänge beim Entleeren dieses Silos gezogen. Danach werden Berechnungen zur Entleerung von Silos vorgestellt. Die Simulation wird mit dem FINITE-ELEMENT-METHODE Berechnungsprogramm SILO durchgeführt. Die Wahl des hypoplastischen Stoffmodells nach von Wolfersdorff für die Entleerungsberechnungen wird anhand einer Konvergenzuntersuchung begründet. Der Einfluss der dynamischen Stoffparameter und der Schüttgutedichte auf das dynamische Verhalten des Stoffmodells wird mit Parameterstudien aufgezeigt. Für die Untersuchung des Fließens des Schüttgutes werden die in Kapitel 4.1 vorgestellten Silogeometrien mit den Trichterneigungen $\Theta = 15^\circ$, $\Theta = 60^\circ$ und $\Theta = 90^\circ$ verwendet. Es werden Kern- und Massenflusssilos untersucht. Effekte wie das Hochlaufen des Switch und die Schwingung der Schüttgutsäule im Siloschaft können gezeigt werden.

Zum Vergleich mit den Simulationsergebnissen werden die parallel zu dieser Arbeit am Institut für Mechanische Verfahrenstechnik der TU Braunschweig (IMVT) durchgeführten Messungen des Geschwindigkeitsfeldes und der Wandspannungen im Silo verwendet. Für die Messung des Geschwindigkeitsfeldes werden optische Methoden genutzt (siehe Ostendorf, Theuerkauf und Schwedes (2000)). Durch die gleichzeitige Messung des Bewegungsfeldes mit optischen Methoden und der Wandspannungen mit Spannungsmesszellen wird der Schüttgutzustand im Experimentalsilo besonders gut erfasst. Es ergeben sich Möglichkeiten, die Messdaten direkt mit den Ergebnissen aus der Simulation zu vergleichen.

6.1 Beobachtungen zum Siloschlagen

Der rechteckige Stahlsilo (Kapitel 4.1) ($B = 800\text{mm}$, $T = 1200\text{mm}$, $H = 5000\text{mm}$) des Siloprüfstandes Braunschweig zeigt beim Entleeren mit PET-Pellets starke dynamische Effekte (Hardow (1998)). Die Silokonstruktion hat je nach Füllstand

eine veränderliche Eigenfrequenz im Bereich um 10Hz. Beim Entleeren zeigt das Silo in unregelmäßigen Abständen das *Siloschlagen*. Dies sind Schläge, die spürbar in die tragende Konstruktion und den Untergrund übertragen werden. Der Effekt kann wie folgt beschrieben und charakterisiert werden (siehe Hardow (1998)):

Das Schlagen ist eine Funktion von

- Material und
- Abzugsgeschwindigkeit,

nachweisbaren Einfluss haben

- Regionen unterschiedlicher Dichte und
- die Härte bzw. Sprödigkeit des Materials,

noch nicht nachweisbaren Einfluss haben

- stick-slip-Effekte an der Wand,
- dynamische Brücken → Hohlraumbildung,
- alternierender Fluss zwischen Kern- und Massenfluss und
- intergranulare stick-slip-Effekte.

Bei dem oben beschriebenen geschweißten Stahlsilo des Siloprüfstandes Braunschweig (Kapitel 4.1) sind konstruktionsbedingte Wandimperfectionen von mehreren Millimetern in Feldmitte vorhanden. Diese Imperfectionen führen zu einer ungleichmäßigen Spannungsverteilung im Füllzustand und zu alternierenden Spannungszuständen beim Entleeren. Auf Grund dieser geometrischen Ungenauigkeiten wird dieser Silo nicht in die numerische Simulation einbezogen. Es werden die fertigungstechnisch geometrisch genaueren Plexiglassilos des IMVT mit der FINITE-ELEMENT-METHODE modelliert.

6.2 Vergleich der Stoffmodelle

Das Füllen des Silos kann mit dem einfachen Modell nach Kolymbas 1989 (Gleichung (3.1)) mit nur vier Stoffkonstanten gut abgebildet werden, da es ein quasi-statischer Vorgang ist, bei dem das Modell von Kolymbas eine gute Konvergenz

zeigt und eine gute Übereinstimmung mit den gemessenen Wandspannungen ergibt. Der Rechenaufwand ist wesentlich geringer als mit dem Modell nach von Wolffersdorff und daher wird der Füllvorgang in den verwendeten Beispielen mit dem Modell nach Kolymbas berechnet.

Der Füllvorgang kann inkrementell über die gesamte Silohöhe oder mit einer schichtweisen Füllmethode simuliert werden. Der Unterschied der Wandnormalspannungen zwischen dem inkrementellen Füllen und dem schichtweisen Füllen ist gering (siehe auch (Lehmann 1996)). Der Einfluss unterschiedlicher Füllmethoden auf die Entleerungsberechnungen ist verschwindend klein. Das inkrementelle Füllen über die gesamte Silohöhe erfordert einen geringeren Rechenaufwand gegenüber dem schichtweisen Füllen. Daher wird der Silo in dieser Arbeit inkrementell über die gesamte Silohöhe gefüllt.

Für die Berechnung des Entleerens reicht das Modell von Kolymbas 1989 nicht mehr aus. Das Bild 6.1 zeigt einen Vergleich der Stoffmodelle aus Kapitel 3.4 beim Entleeren und eine Konvergenzuntersuchung an verschiedenen Netzen. Das Modell nach Kolymbas von 1989 zeigt eine Netzabhängigkeit und schlechte Konvergenz, wogegen das Modell nach von Wolffersdorff keine Abhängigkeit vom Netz zeigt und gut konvergiert. Dies ist mit der verbesserten Darstellung des Schüttgutverhaltens in Abhängigkeit von der Porenzahl und dem Spannungszustand beim Modell von von Wolffersdorff zu erklären. Jedoch muss bei dem Modell nach von Wolffersdorff mit einer Zeitschrittweite von ca. 10^{-6} s gerechnet werden. Je nach Entleerungsgeschwindigkeit und -dauer muss die Schrittweite verkleinert werden. Die erforderliche Zeitschrittweite wird im Programm SILO anhand der zulässigen Spannungszustände im Schüttgut bestimmt. Beim Verlassen des zulässigen Spannungsraumes muss die Schrittweite reduziert werden.

Ein Vergleich der Schüttgüter PET (Polyethylenterephthalat) und PP (Polypropylen) mit den Stoffwerten aus Tabelle 3.2 wird in Bild 6.2 gezeigt. Die Geschwindigkeitsentwicklung während der ersten Sekunde des Entleerens verläuft sehr ähnlich. Im Folgenden werden die Werte für PET verwendet.

6.3 Einfluss der dynamischen Stoffparameter

Die in Kapitel 3.6.3 eingeführten Stoffparameter zur Beschreibung des Fluidverhaltens des Schüttgutes werden hier in Berechnungen vorgestellt. Zur besseren

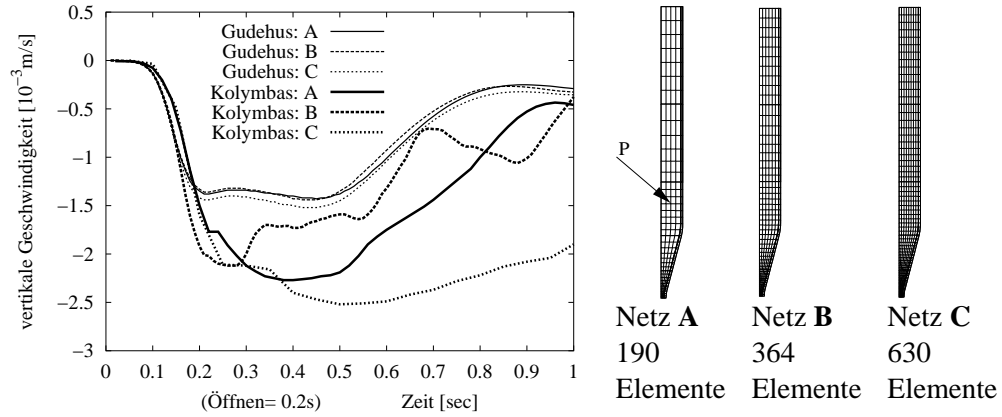


Bild 6.1: Vertikale Schüttgutgeschwindigkeit im Punkt P im Schaftbereich des Massenflusssilos $\Theta = 15^\circ$: Vergleich des Modells nach Kolymbas und des verbesserten hypoplastischen Modells nach Gudehus und von Wolffersdorff an drei verschiedenen Netzen, mit $\mu_0 = 1.0$ und $\psi = 1.0$

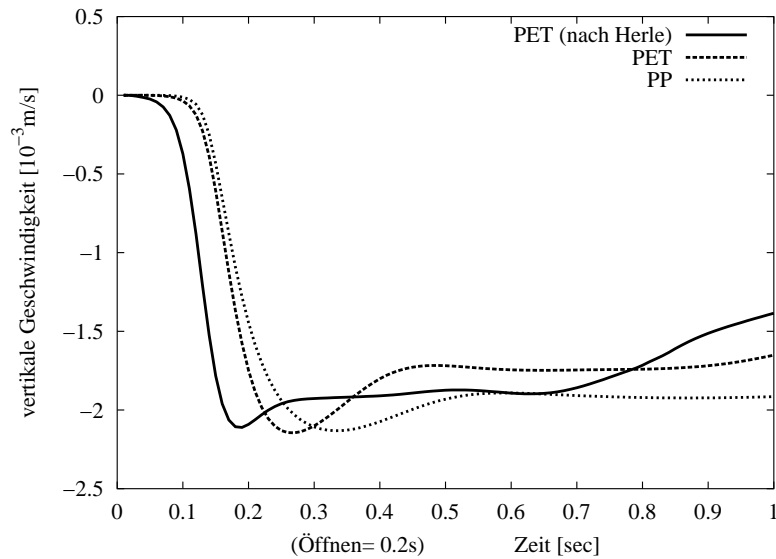


Bild 6.2: Vergleich von Verschiedenen Schüttgütern: Vertikale Geschwindigkeit in der Symmetrieachse im Abstand $y = 32\text{cm}$ vom Auslauf bei der Trichterneigung $\Theta = 15^\circ$

Lesbarkeit wird die Gleichung (3.28) hier noch einmal aufgeschrieben:

$$\mu = \left(\frac{\rho(t)}{\rho_0} \right)^\psi \mu_0. \quad (6.1)$$

Der Exponent ψ ist ein Parameter, der den Einfluss der Dichteänderung auf die Viskosität des Materials steuert. Der Parameter $\mu_0 [\text{Ns/m}^2]$ beschreibt die Anfangsviskosität des Schüttgutes beim Dichteverhältnis $\rho(t)/\rho_0 = 1$. Beide Parameter müssen am Experiment ermittelt werden; geplant ist die Auswertung von optischen Messungen. Die Parameter der Gleichung (6.1) müssen so angepasst werden, dass die Simulationsrechnung das gemessene Geschwindigkeitsfeld abbildet. Im Folgenden wird auf Werte für ψ und μ_0 zurückgegriffen, die in der vermutlichen Größenordnung der tatsächlichen Werte liegen, da die Versuche und die Vergleichsrechnungen derzeit noch nicht abgeschlossen sind.

Der Einfluss der dynamischen Stoffparameter ψ und μ_0 aus Gleichung (6.1) wird anhand des Testsilos mit der Trichterneigung $\Theta = 15^\circ$ in Bild 6.3 gezeigt. In den Berechnungen werden die Stoffparameter aus Tabelle 3.2 für PET verwendet. Die am Auslass vorgegebene Entleerungsgeschwindigkeit (siehe Kapitel 5.5.1) beträgt $v_{\text{off}} = 0.01 \text{ m/s}$, die in einer Öffnungsperiode von 0.2s erreicht wird. Der Berechnungszeitraum beträgt jeweils eine Sekunde bzw. drei Sekunden. Bild 6.3 zeigt den Einfluss der dichteabhängigen Viskosität im Auslaufbereich des Silos. Hier treten sowohl die größten Scherverformungen (3.27) als auch die größten Dichteänderungen (6.1) auf.

Der Einfluss des Exponenten ψ auf das Materialverhalten kann am leichtesten anhand der Porenzahl e gezeigt werden. Das Stoffmodell nach von Wolffersdorff reagiert sehr empfindlich auf kleinste Änderungen der Porenzahl e , da das Schüttgut bereits bei kleinsten Schwankungen der Porenzahl sein mechanisches Verhalten stark verändert. Die Anfangsporenzahl e_0 für die Entleerungsberechnung mit dem Modell nach von Wolffersdorff wird aus dem Füllspannungszustand des ersten Zeitschrittes und der kritischen Porenzahl e_{c0} (Gleichung (3.19)) für jedes Finite-Element berechnet. Das Diagramm in Bild 6.4 zeigt den Einfluss des Exponenten ψ aus Gleichung (6.1) auf die Porenzahl in der Nähe des Siloauslaufes über einen Berechnungszeitraum von 1s. Die Porenzahlen in Bild 6.4 nehmen während der ersten Sekunde des Entleerens, für die vorgegebene Entleerungsgeschwindigkeit $v_{\text{off}} = 0.01 \text{ m/s}$ am Auslass, für die Exponenten $\psi = 0.5$ und $\psi = 1.0$ die gleichen Werte an. Die Dichteänderung ist sehr gering, daher bleibt der Quotient $\rho_0/\rho(t)$ nahe bei 1.0 und der Einfluss des Exponenten $\psi = 0.5$ ist unbedeutend. Wird der Exponent $\psi = 2.0$ verwendet, steigt die Porenzahl im Verlauf der ersten Sekun-

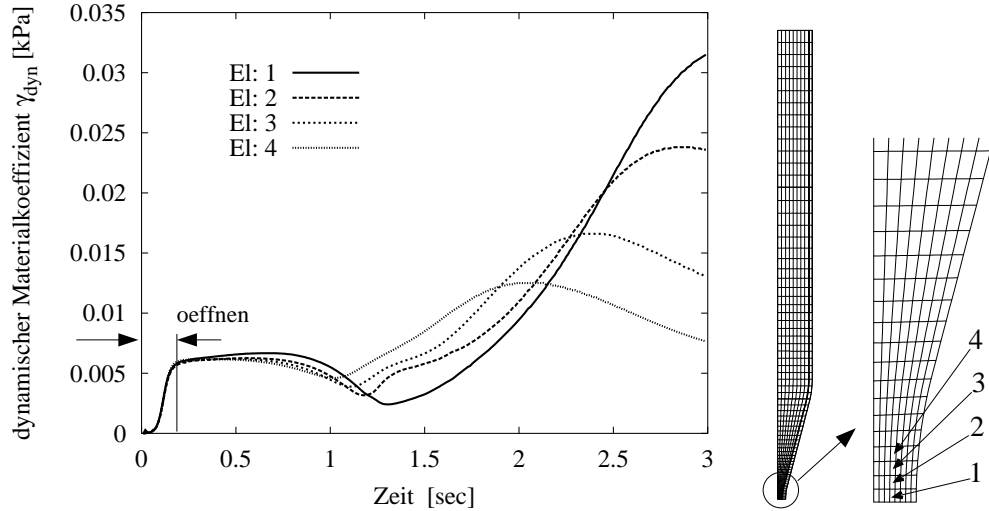


Bild 6.3: Zeitlicher Verlauf des dynamischen Materialkoeffizienten γ_{dyn} (3.27) im Massenflusssilo: Abhängigkeit vom Beobachtungsort nahe der Öffnung, mit $\psi = 0, 1$ und $\mu_0 = 0,8 \text{Ns/m}^2$

de des Entleerens deutlich an. Das Schüttgut lockert stärker auf. Die abnehmende Dichte $\rho(t)$ hat gemäß Gleichung (6.1) eine kleinere Viskosität und somit eine stärkere Auflockerung zur Folge. Exponenten $\psi > 1.0$ berücksichtigen den Einfluss von kleinen Dichteänderungen besser als Exponenten $\psi \leq 1.0$ (vergleiche Bild 3.11).

Die vertikale Geschwindigkeitskomponente im Bereich nahe des Auslaufes ($y = 20\text{mm}$) wird in Bild 6.5 über einen Entleerungszeitraum von einer Sekunde und gewähltem $\mu_0 = 0.1 \text{Ns/m}^2$ dargestellt. Für $\psi = 2.0$ ist die vertikale Geschwindigkeit etwas geringer als mit $\psi \leq 1.0$; dies ist mit der Kontinuitätsbedingung Gleichung (2.5) zu begründen. Bei größerer Auflockerung ($\psi = 2.0$ Bild 6.4) wird bei gleicher Auslassgeschwindigkeit $v_{\text{öff}}$ weniger Schüttgutmasse abgezogen. Daher ist die vertikale Schüttgutgeschwindigkeit geringer (Bild 6.5). Die Berechnung mit $\psi = 2.0$ zeigt am Ende des Berechnungszeitraumes ein stabileres Lösungsverhalten als die Berechnungen mit geringerem Dichteinfluss (kleines ψ). Die Fluideigenschaften werden besser abgebildet und es werden über längere Berechnungszeiträume zulässige Spannungszustände gefunden.

Der Einfluss von unterschiedlichen Anfangsviskositäten μ_0 wird in Bild 6.6 anhand der vertikalen Geschwindigkeitskomponente im oberen Trichterbereich $y =$

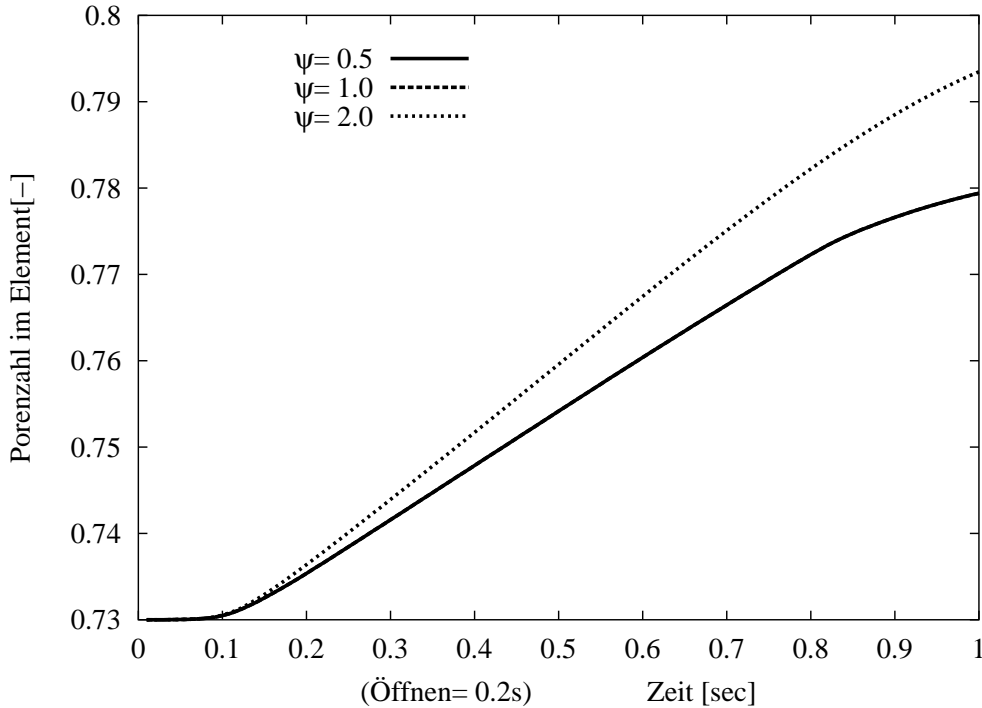


Bild 6.4: Porenzahl nahe beim Auslauf ($y = 20\text{mm}$): Unterschiedliche Exponenten ψ mit $\mu_0 = 0.1\text{Ns/m}^2$

560mm des Massenflusssilos mit der Trichterneigung $\Theta = 15^\circ$ gezeigt. Für die Anfangsviskositäten $\mu_0 = 1.0\text{Ns/m}^2$ und $\mu_0 = 10.0\text{Ns/m}^2$ in Bild 6.6 sind die vertikalen Geschwindigkeiten bis etwa 0.8s der Entleerungszeit gleich, ab diesem Zeitpunkt zeigt die Rechnung mit $\mu_0 = 1.0\text{Ns/m}^2$ Konvergenzprobleme, da hier die Dämpfung zu gering wird. Die Geschwindigkeit mit $\mu_0 = 0.1\text{Ns/m}^2$ ist über den Zeitraum bis etwa 0.9s geringer und anschließend höher als die Geschwindigkeiten mit den zwei größeren Viskositäten. Durch die geringere Viskosität ist die Auflockerung des Schüttgutes in tieferen Lagen größer und somit die Geschwindigkeit im oberen Bereich geringer.

6.4 Einfluss der Schüttgutdichte

Der Einfluss von unterschiedlicher Schüttgutdichte kann in Bild 6.7 abgelesen werden. In den berechneten Beispielen werden $\psi = 2$ und $\mu_0 = 10.0\text{Ns/m}^2$ und

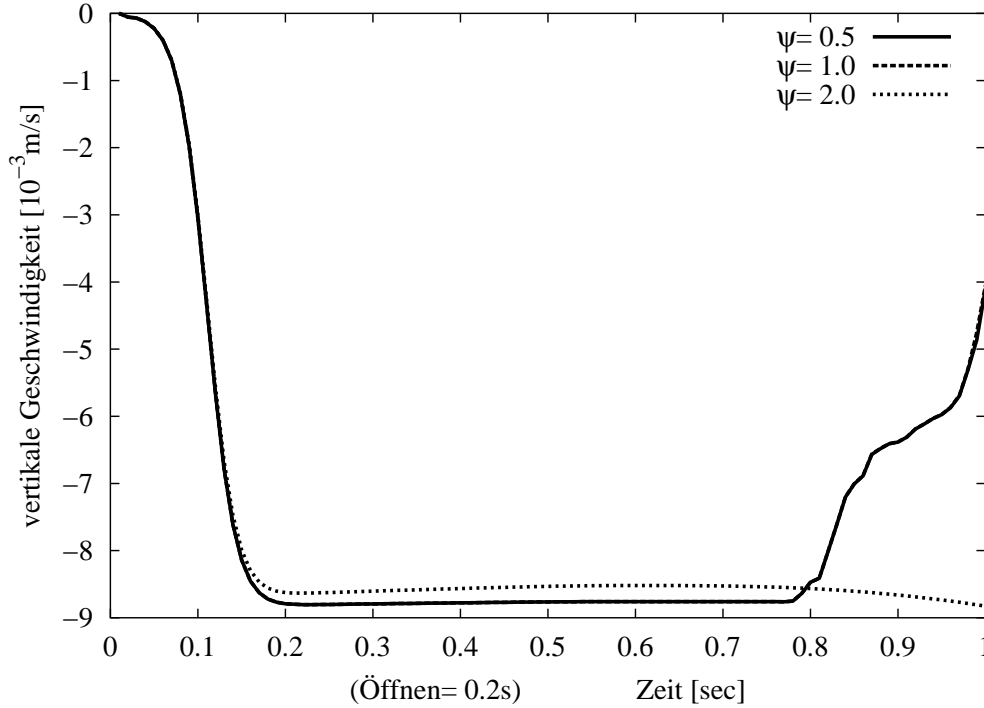


Bild 6.5: Vertikale Geschwindigkeit nahe beim Auslauf ($y = 20 \text{ mm}$): Unterschiedliche Exponenten ψ mit $\mu_0 = 0.1 \text{ Ns/m}^2$

die Stoffparameter aus Tabelle 3.2 für PET verwendet. Die tatsächliche Dichte $\rho_{org} = 950 \text{ kg/m}^3$ des Schüttgutes wird variiert. Für größere Schüttgutdichten sind höhere Amplituden und später entstehende Maxima der Wandgeschwindigkeiten zu erkennen; dies ist mit der höheren Trägheit der Masse zu erklären. Die Ergebnisse in Bild 6.7 zeigen, dass der Einfluss der Schüttgutmasse auf das dynamische Verhalten des Silos richtig implementiert ist.

6.5 Switch

Bei dem Versuchssilo mit der Trichterneigung $\Theta = 15^\circ$ können im Experiment die Wandspannungen gemessen werden. Für die Darstellung des Switch mit den Ergebnissen aus der Simulation wird die Deformationsrate \mathbf{D} verwendet. Diese wird direkt mit der FINITE-ELEMENT-METHODE berechnet (siehe Kapitel 5.2). Die in Bild 6.8 und Bild 6.9 dargestellten Positionen der Spannungsmesszellen

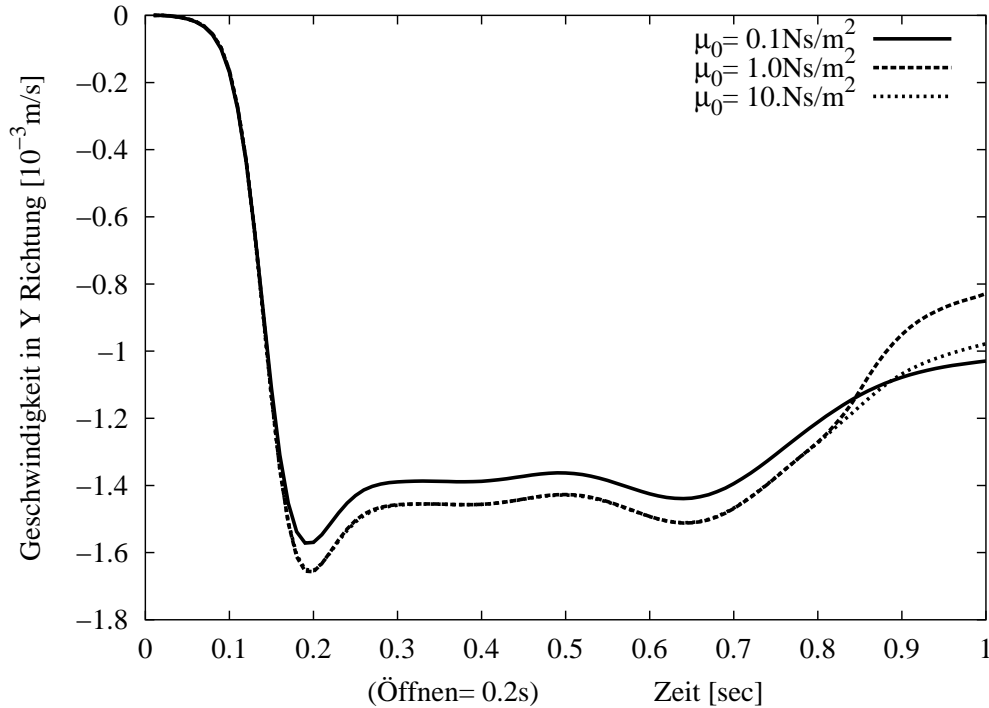


Bild 6.6: Vertikale Geschwindigkeit im Trichter ($y = 560\text{mm}$) mit $\psi = 2.0$: Vergleich von unterschiedlichen Anfangsviskositäten μ_0

R1–R3 im Trichter und R7 im Schaft entsprechen den Positionen aus Bild 4.2. Ein Abfallen der Deformationsrate bedeutet eine Kompression, also einen Anstieg der Druckspannungen. Eine positive Deformationsrate hat eine Expansion, also ein Absinken der Druckspannungen, zur Folge. In Bild 6.8 ist daher die Deformationsrate negativ nach oben aufgetragen, damit ein Vergleich mit den gemessenen Wandnormalspannungen (Bild 6.9) leichter fällt.

Beim beginnenden Entleeren ist im Trichter (R1–R3) ein Absinken der Deformationsrate bis zu einem lokalen Minimum zu erkennen. Dieses Minimum tritt im unteren Trichterbereich bei der Position R1 früher auf als im oberen Bereich des Trichters bei den Positionen R2 und R3. Dies bedeutet, dass eine Druckspannungsspitze vom Auslass nach oben läuft (vergleiche Bild 1.3). An der Position der Messzelle R7 im Schaft zeigt Bild 6.8 eine ansteigende Deformationsrate, also tritt beim beginnenden Entleeren eine Entlastung auf. Die Entlastung im Schaft kann anhand der Bilder 6.13 und 6.14 an der nach innen gerichteten Wandverformung abgelesen werden.

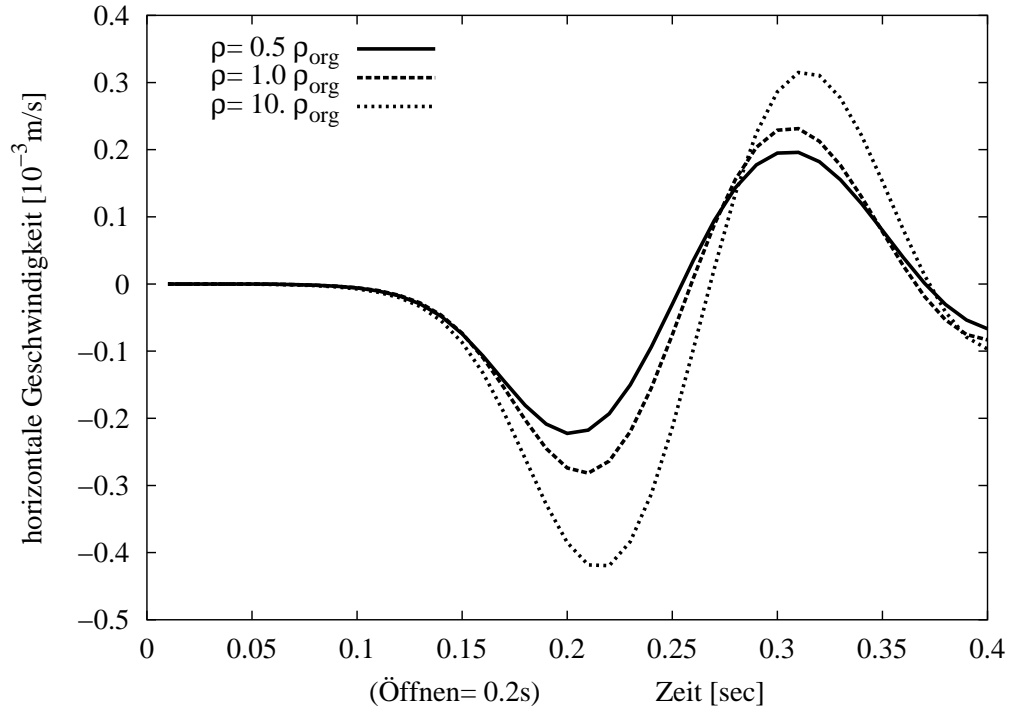


Bild 6.7: Horizontale Geschwindigkeit der Wandelemente im Bereich zwischen zwei Auflagern (Referenzpunkt aus Bild 5.6): Einfluss von unterschiedlicher Schüttgutdichte ($\rho_{org} = 950 \text{ kg/m}^3$) auf die Wandbewegungen

Die Messergebnisse zum Switch werden in Bild 6.9 dargestellt. An den Messpositionen R1 bis R3 ist der zeitlich nach hinten versetzte Spannungspk (zum Zeitpunkt 2.4s) zu erkennen. Die hier nicht verwendete Messposition R4 im Übergangsbereich vom Schaft zum Trichter ist kritisch zu beurteilen. Die Einbauposition der Messzelle ist konstruktiv problematisch, da hier die Plexiglaswände aufeinander treffen und die Verformungen der Silowand besonders groß sind. Zudem ist der Spannungszustand nach dem Füllen im Knickbereich gestört, da durch die verwendete Einfüllmethode kein homogener Füllzustand erreicht werden kann. Zukünftig werden andere Füllmethoden erprobt, die einen homogenen Spannungszustand nach dem Füllen erwarten lassen.

Die Messzelle an Position R7 im Schaft zeigt eine Entlastung der Silowand beim beginnenden Entleeren an, in der Darstellung in Bild 6.9 ist dies wegen des verwendeten Maßstabes nur schwer zu erkennen. Dies ist in guter Übereinstimmung mit der Simulation (Bild 6.8). Der Vergleich von Experiment und Simulation

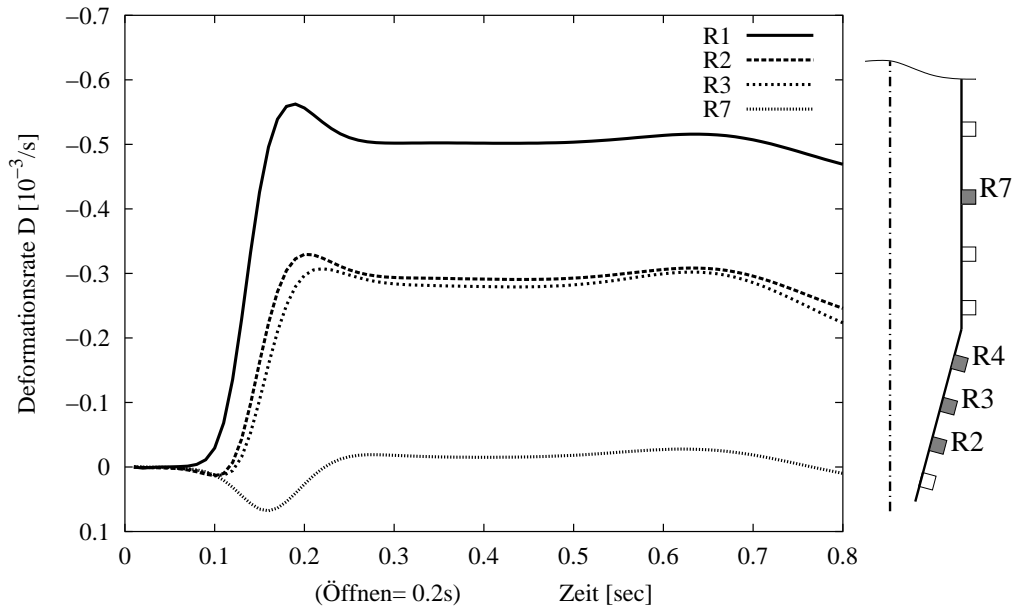


Bild 6.8: Simulation : Deformationsrate D normal zur Wand an den Positionen der Messzellen im Schaft R7 und im Trichter R1–R3

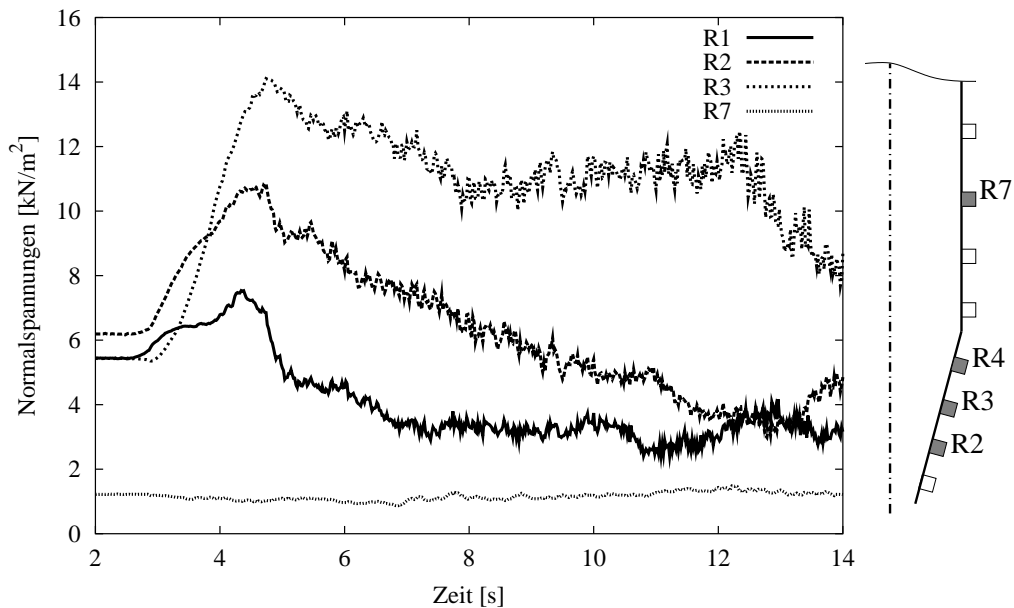


Bild 6.9: Experiment: Wandnormalspannungen an den Positionen der Messzellen im Schaft R7 und im Trichter R1–R3

zeigt, dass sowohl der hochlaufende Switch qualitativ berechnet, als auch die Entlastung im Schaft beim beginnenden Entleeren richtig dargestellt wird. Bild 6.13 zeigt die nach oben laufende Entlastungswelle der Silowand in der Simulation. Die maximale Spannungsspitze beträgt etwa 2 kN/m^2 und ist klein, dies ist auf das verwendete Schüttgut und die Silogeometrie zurückzuführen. In diesem Fall ist die Spannungserhöhung für die Bemessung der Silokonstruktion nicht maßgebend.

6.6 Geschwindigkeitsfelder: Simulation und Experiment

Die mit der FINITE-ELEMENT-METHODE berechneten Geschwindigkeitsfelder bei Kern- bzw. Massenflusssilos ($\Theta = 15^\circ$ bzw. $\Theta = 90^\circ$) werden mit Messdaten aus dem Experiment überprüft. Die experimentellen Daten sind mit der Particle-Image-Velocimetry (PIV) ausgewertete Aufnahmen der CCD-Kamera (Bild 4.1). Bei der PIV werden Bildausschnitte von einer Aufnahme zur nächsten auf Verschiebung der Partikeln hin überprüft und dann mit einer Korrelation in Richtung und Größe ausgewertet. Es entsteht ein über die Zeit und die Beobachtungsausschnitte gemitteltes Geschwindigkeitsfeld. Die Einfügapunkte der experimentell ermittelten Geschwindigkeitsvektoren ergeben sich aus dem Beobachtungsraster des PIV Algorithmus und werden möglichst dicht an den Elementmittelpunkten der FEM-Berechnung gewählt. Die Werte der Simulation sind im Element gemittelt angegeben, da bei Ausgabe der Geschwindigkeiten an jedem Knoten des FEM-Netzes zu viele Ergebnisse dargestellt würden. Es sind jeweils zwei Ausschnitte des Auslaufbereiches abgebildet, damit das Geschwindigkeitsprofil im Überblick und im Detail, nahe am Auslauf, gezeigt werden kann. Die dargestellten Bildausschnitte entsprechen jeweils dem Bildbereich der CCD-Kamera. Die Bilder 6.10 und 6.11 zeigen die Ergebnisse der Simulation mit roten Pfeilen und die experimentellen Daten mit blauen Pfeilen.

In Bild 6.10 ist der Massenflusstrichter des Testsilos dargestellt. Die in der Simulation berechneten Werte liegen eng bei den experimentell ermittelten Daten. Die Randeffekte des Experimentes müssen vernachlässigt werden, da hier der PIV Algorithmus ungenau wird und sowohl Größe, als auch Richtung der ermittelten Geschwindigkeitsvektoren nicht repräsentativ sind.

Das Geschwindigkeitsfeld in Bild 6.11 zeigt den Massenfluss im $\Theta = 90^\circ$ Silo. Besonders im oberen Bereich des Silos sind die berechneten Werte der FEM Simulation nahe bei den experimentell ermittelten Geschwindigkeiten. Jedoch fällt

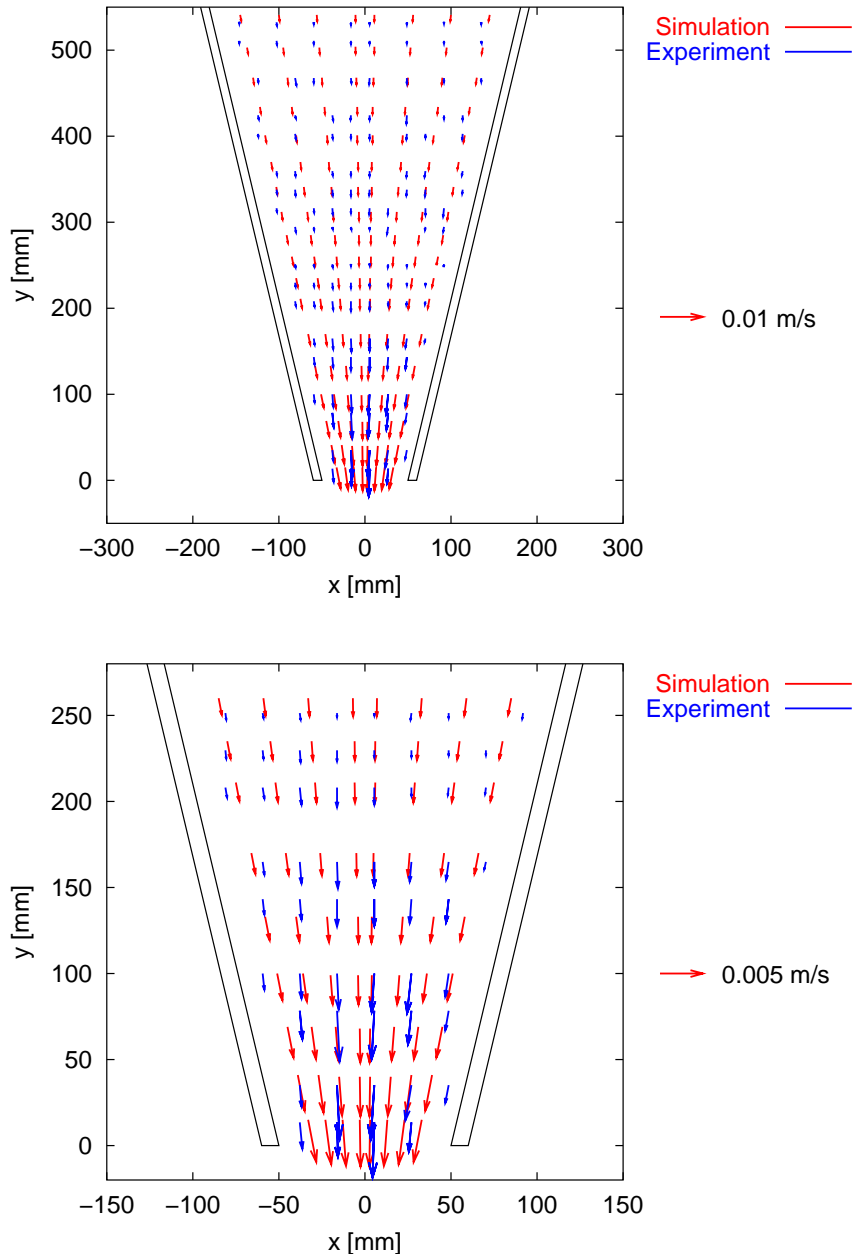


Bild 6.10: Geschwindigkeitsfeld im 15° Silo: Vergleich zwischen Simulation und Experiment. Die Simulation zeigt die Geschwindigkeit beim Erreichen der maximalen Auslaufgeschwindigkeit $v_{\text{öff}} = 0.01 \text{ m/s}$, das Experiment stellt die Geschwindigkeiten gemittelt über 2s der Entleerung dar

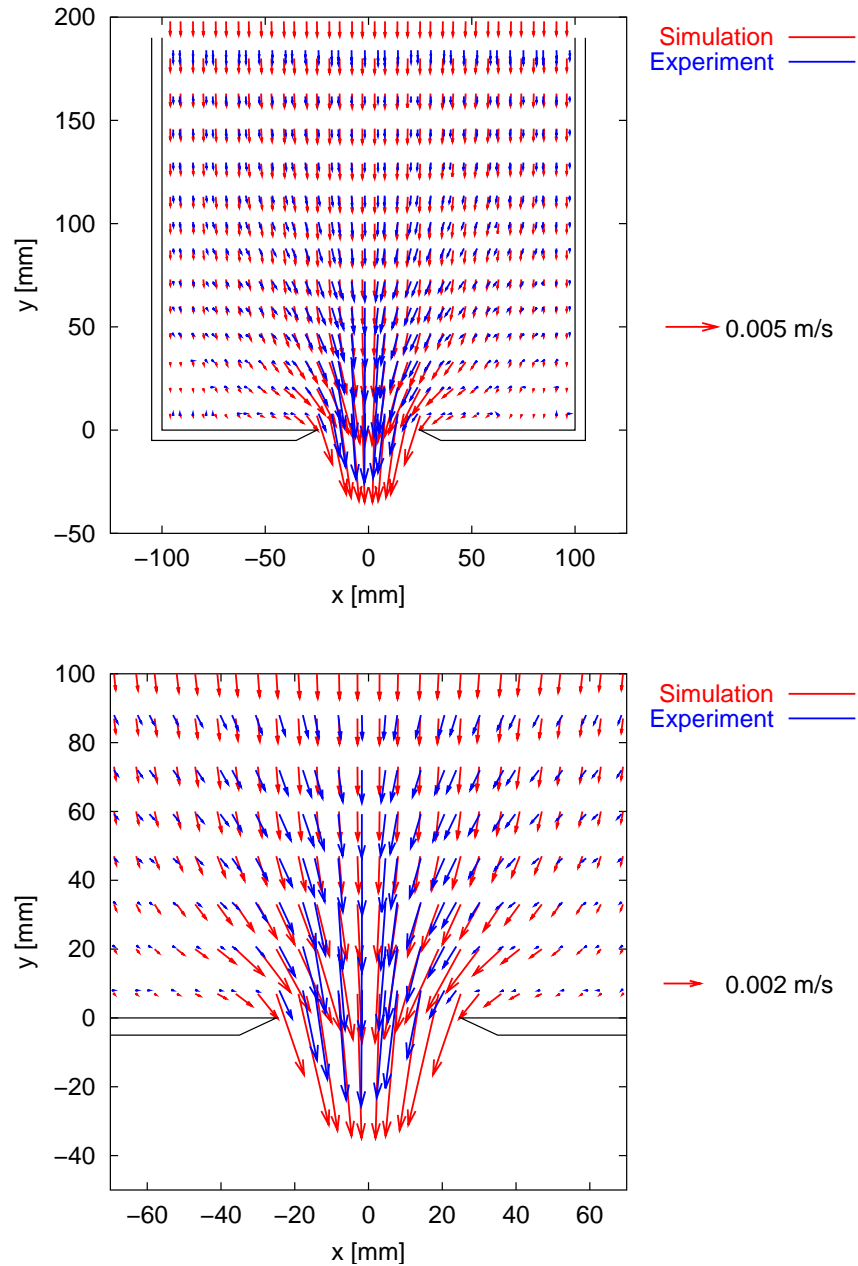


Bild 6.11: Geschwindigkeitsfeld im 90° Silo: Vergleich zwischen Simulation und Experiment. Die Simulation zeigt die Geschwindigkeit beim Erreichen der maximalen Auslaufgeschwindigkeit $v_{\text{off}} = 0.01 \text{ m/s}$, das Experiment stellt die Geschwindigkeiten gemittelt über 2s der Entleerung dar

auf, dass die Geschwindigkeiten im Experiment zum Rand hin schneller kleiner werden als in der Simulation. Die tote Zone im Experiment bildet sich also steiler aus. Dies kann auf die nicht ausreichend abgebildeten Scherdeformationen und die Fließeigenschaften des Stoffmodells zurückgeführt werden. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass der innere Reibungswinkel des Schüttgutes in der Simulation zu klein ist. Die Berücksichtigung des geringen Spannungsniveaus beim Entleeren für die Parameterbestimmung und eine stärkere Berücksichtigung des Dichteinflusses auf den inneren Reibungswinkel könnten zu einer Verbesserung der Simulationsergebnisse beitragen.

6.7 Schwingungen der Schüttgutsäule und Wandverformungen

Das Bild 6.12 zeigt die berechnete vertikale Schüttgutgeschwindigkeit an vier Positionen im Massenflusssilo mit der Trichterneigung $\Theta = 15^\circ$. Es werden in der Symmetrieachse des Silos zwei Positionen im Schaft und zwei Positionen im Trichter über einen Entleerungszeitraum von einer Sekunde dargestellt. Das dynamische Verhalten des Schüttgutes im Schaft wird deutlich. Während der Öffnungsphase wird das Schüttgut im Trichterbereich aufgelockert, die vertikalen Geschwindigkeiten in der Nähe des Auslaufs sind größer als die Geschwindigkeiten an höher liegenden Punkten. Nach dem Ende der Öffnungsphase $t = 0.2\text{s}$ nehmen die Geschwindigkeiten im Schaftbereich größere Werte an, als dies im Trichterbereich der Fall ist. Das Schüttgut 'sackt' zusammen. Es kommt zu einer Kompression des Schüttgutes am Übergang vom Trichter in den Schaft. Während der Kompressionsphase wird im Übergangsbereich zwischen Schaft und Trichter die Porenzahl kleiner. Diese Kompressionszone ist in Bild 6.18 mit heller Farbe dargestellt. Die Verdichtungszone entsteht unterhalb des Knicks im Trichter und breitet sich gewölbeförmig zur Silomittelachse hin aus.

Zum Zeitpunkt von etwa 0.8s wird die Geschwindigkeit im Schaft wieder langsamer, es kommt erneut zu einer Auflockerungsphase. Dieser Wechsel zwischen Auflockerung und Verdichtung in vertikaler Richtung kann die Eigenfrequenz des Silos anregen und so zum Siloschlagen führen. Im Experiment wird die Eigenfrequenz von 15Hz des Versuchssilos beim Entleeren mit den PET-Pellets schwach angeregt. Bei der Simulation wird die Kopplung an die Umgebung bisher vernachlässigt, die Entleerungsberechnung über einen Zeitraum von 3s zeigt eine Schwingung der Schüttgutsäule im Schaft von 1.5Hz .

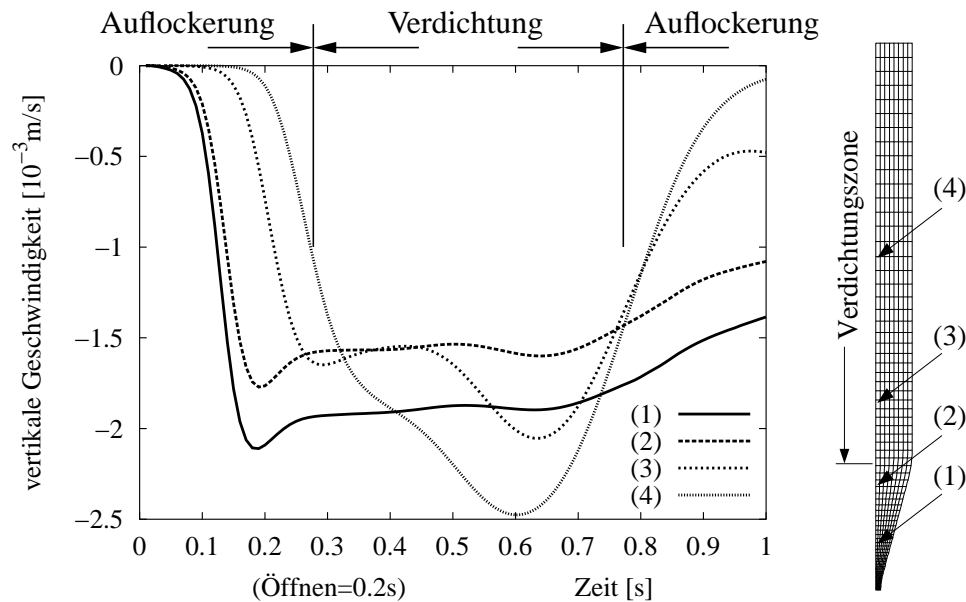


Bild 6.12: Vertikale Schüttgutgeschwindigkeit v an ausgewählten Punkten: Vergleich zwischen Trichter und Schaft, bei größeren Geschwindigkeiten im Schaft Verdichtung am Übergang zum Trichter sonst Auflockerung

Die Simulationsrechnungen und das Experiment zeigen, dass eine zyklische Belastungsänderung bei konstanter Abzugsgeschwindigkeit auftritt. Die Wandverformungen lassen eine Schwingung erkennen, die vom Schüttgut auf die Wand übertragen wird. Je nach Steifigkeit der Konstruktion ändern sich die Verformungen. Für eine quantitative Bestimmung der Effekte müssen jedoch die in Gleichung (3.27) und Gleichung (6.1) genannten dynamischen Stoffparameter μ_0 und ψ durch Versuche bestimmt werden. Die hierfür erforderlichen Bestimmungsversuche sind derzeit in Vorbereitung. Es werden die optische Messung und die gleichzeitige Wandspannungsmessung zum Einsatz kommen.

Die Simulation zeigt, dass die Wandverformung im Siloschaft vom Belastungsbeginn an, von unten beginnend nach zunächst innen gerichtet ist, also zum Entleerungsbeginn eine Entlastung durch das Schüttgut nach oben läuft (siehe auch experimentelle Ergebnisse aus Bild 6.9). Daran schließt eine zyklische Wiederkehr von nach außen und nach innen gerichteten Verformungen an (siehe Bild 6.13 und Bild 6.14). Die Lagerungen der Silowand (Bild 5.2) sind in Bild 6.13 als verformungsfreie horizontale Linien zu erkennen.

Die folgenden farbigen Darstellungen (in den Bildern 6.14 bis 6.21) stellen die

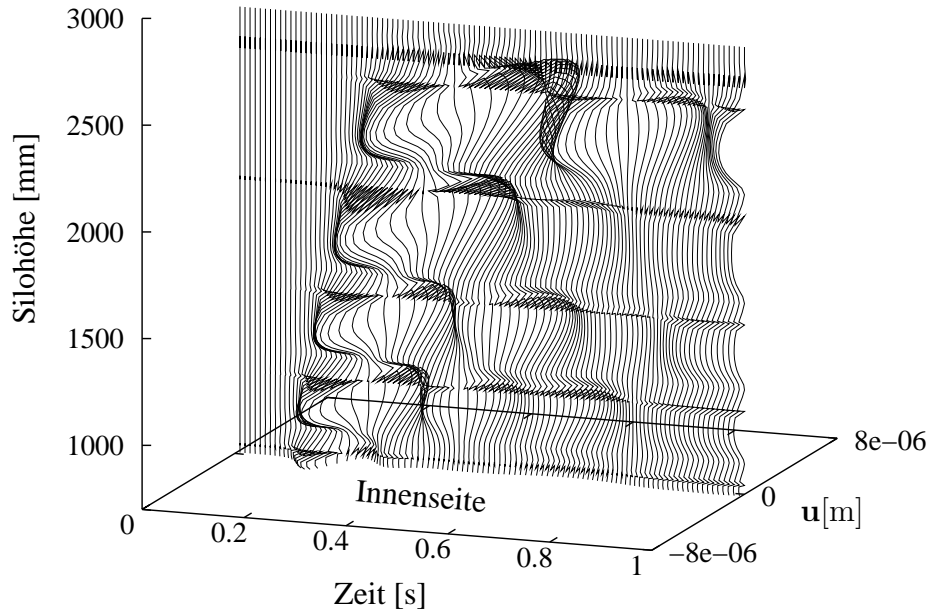


Bild 6.13: Wandverformungen des Siloschaftes vom Knick mit $y = 680\text{mm}$ bis zur max. Höhe $y = 2910\text{mm}$: Verformungen u entlang der Silohöhe über der Zeit

Ergebnisse der FINITE-ELEMENT-METHODE Berechnung mit einer Wärmeskala dar. Es werden warme Farbtöne orange bis rot für hohe Werte und kalte Farbtöne blau bis weiß für kleine Werte verwendet. Der Verlauf der farbigen Bereiche (der Isolinen) wird mit den quadratischen Ansatzfunktionen auf den Elementknoten berechnet.

Die Darstellung in Bild 6.14 zeigt das Geschwindigkeitsfeld im Silo und die überhöht dargestellten Wandverformung des Siloschaftes zu bestimmten Zeitpunkten. Die Ausbreitung der Entleerungsgeschwindigkeiten ist auf einen kleinen Bereich im Trichter begrenzt (Farbe rot bis grün). Ab dem Zeitpunkt $t = 0.4\text{s}$ sind die Geschwindigkeiten im oberen Schaftbereich höher als im unteren Schaftbereich (Farbe dunkelblau bis grün), vergleiche hierzu auch Bild 6.12. Es kommt zu einer Kompression und zu nach außen gerichteten Wandverformungen unterhalb der größeren Geschwindigkeiten im oberen Schaftbereich. An diese Verformung schließt sich ein Zyklus mit nach innen und nach außen gerichteten Verformungen

an (vergleiche Bild 6.13). Die 3-D Darstellung des Bildes 6.13 trägt die Wandverformungen des Siloschaftes ($y \geq 650\text{mm}$) über die Zeit auf. Die nach oben laufende Deformationswelle der Silowand ist zu erkennen. Die nach innen gerichteten Verformungen sind zum Zeitpunkt $t = 0\text{s}$ am Übergang vom Trichter in den Schaft und etwa zum Zeitpunkt $t = 0.4\text{s}$ am oberen Ende des Siloschaftes angelangt (Vergleiche hierzu auch die Wandverformungen in Bild 6.14).

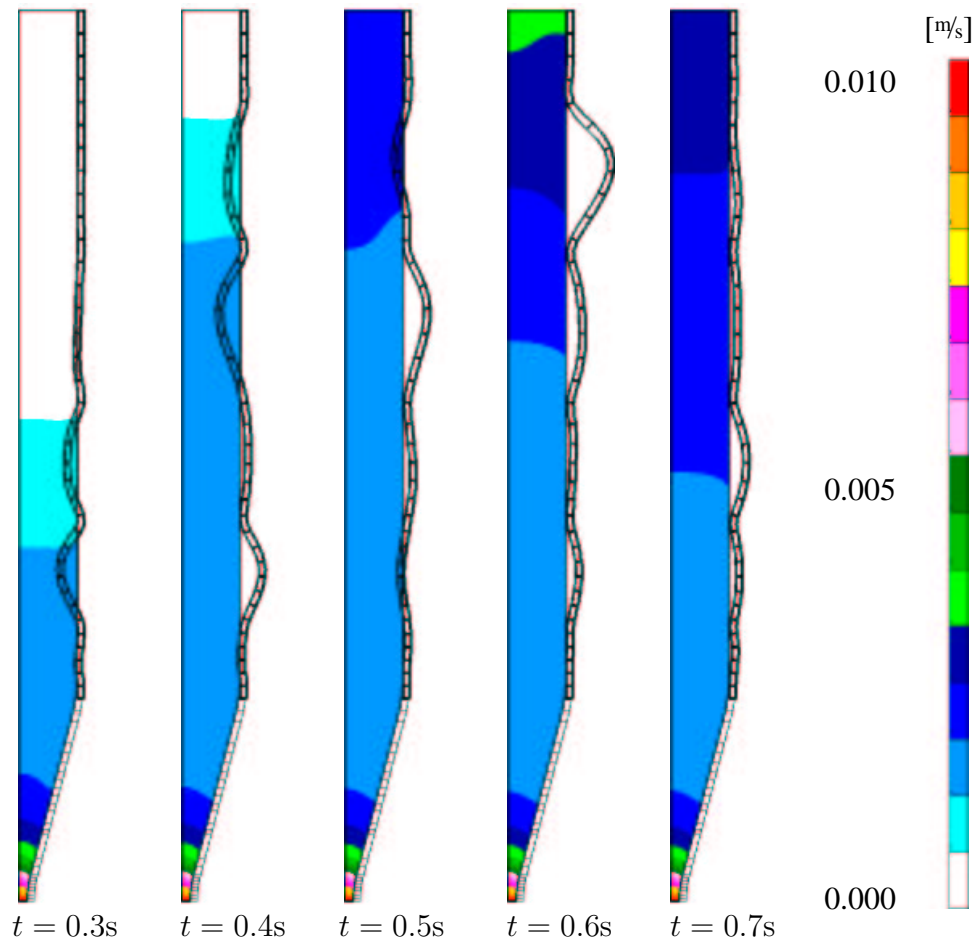


Bild 6.14: Geschwindigkeit des Schüttgutes und Wandverformungen (überhöht dargestellt): Massenflusssilo $\Theta = 15^\circ$ beim Entleeren

Bild 6.15 zeigt den Vergleich der simulierten und gemessenen Wandverformung während der ersten Sekunde des Entleerens im Schaft an der Position der Messzelle W2 (Bild 5.2). Die zunächst nach innen und anschließend nach außen gerichtete Verformung ist im zeitlichen Verlauf gut zu erkennen. Die Simulation liegt dicht

bei den experimentell ermittelten Werten, jedoch vollzieht sich die Verformung der Wand in der Simulation etwas langsamer und die Amplitude der Wandverformung ist geringer.

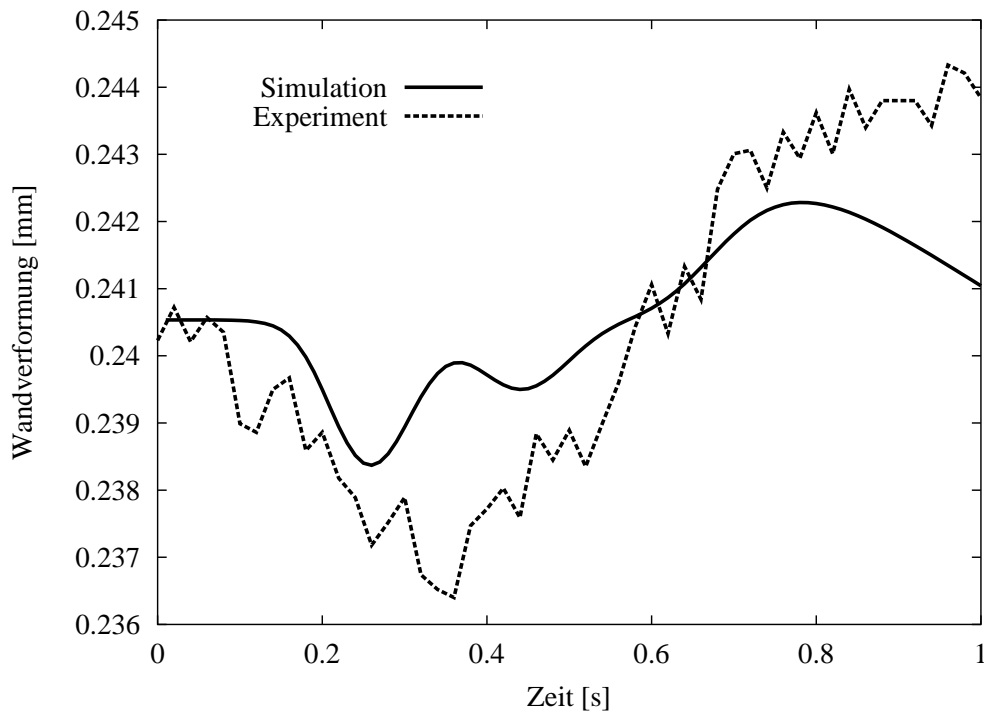


Bild 6.15: Wandverformungen an der Position W2 (Bild 4.2): Vergleich von Simulation und Experiment

6.8 Geschwindigkeitsentwicklung

Die Geschwindigkeit im Kernflusssilo mit der Trichterneigung $\Theta = 60^\circ$ beim Entleeren ist in Bild 6.16 farblich dargestellt. Die hohen Entleerungsgeschwindigkeiten von $v_{\text{öff}} = 0.01 \text{ m/s}$ (rot) sind auf einen sehr kleinen Bereich in der Nähe der Öffnung beschränkt. Zum Zeitpunkt $t = 0.7 \text{ s}$ wird die Geschwindigkeit im oberen Schaft größer als in den unterhalb gelegenen Bereichen und es folgt ein Wechsel von hoher und niedriger Geschwindigkeit im Schaft ähnlich wie beim Massенflusssilo mit der Trichterneigung $\Theta = 15^\circ$ in Bild 6.14. Die Ausbildung

der toten Zone ab dem Zeitpunkt $t = 0.3\text{s}$ ist in Bild 6.16 im Trichterbereich zu erkennen (weiß). Die tote Zone dehnt sich nach oben hin aus und breitet sich zum Zeitpunkt $t = 1.0\text{s}$ kurzfristig in den Schaftbereich aus.

Die Schüttgutgeschwindigkeit beim Entleeren des Kernflusssilos mit der Trichterneigung $\Theta = 90^\circ$ ist in Bild 6.17 dargestellt. Die Auslaufgeschwindigkeit bildet sich auch hier sehr rasch aus und bleibt über den Entleerungszeitraum in Größe und Ausdehnung nahezu unverändert. Neben der Öffnung entsteht die tote Zone mit ruhendem Schüttgut (weiß) und in der Ausdehnung nach oben an der Wand entlang kennzeichnet sehr langsames Schüttgut (dunkelblau) einen sehr steilen Schüttguttrichter im Inneren des Silos. Auch bei dieser Silogeometrie erlangt das Schüttgut oberhalb höhere Geschwindigkeiten als in tiefer liegenden Bereichen.

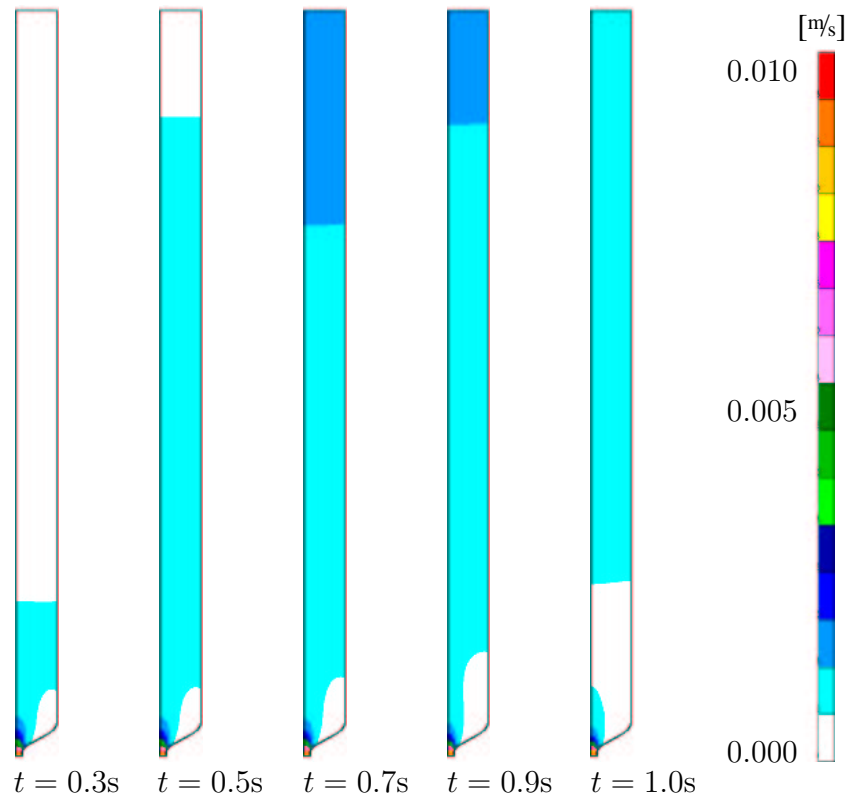
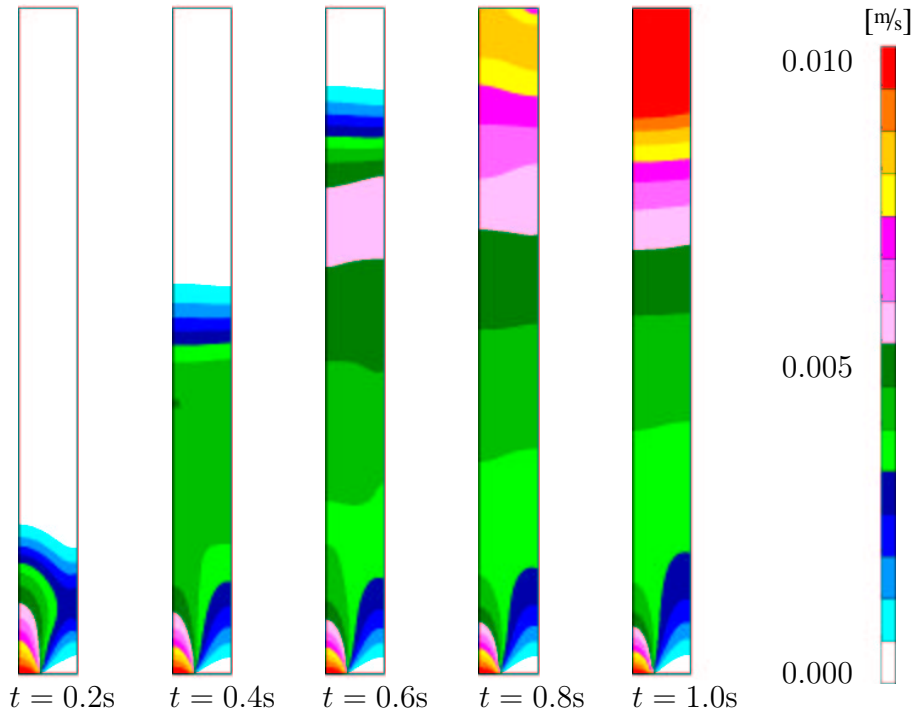


Bild 6.16: Kernflusssilo $\Theta = 60^\circ$: Geschwindigkeit des Schüttgutes

Bild 6.17: Kernflusssilo $\Theta = 90^\circ$: Geschwindigkeit des Schüttgutes

6.9 Porenzahl und Dilatanz

Bei der Auflockerung des Schüttgutes erhöht sich die Porenzahl. Im Stoffmodell nach von Wolffersdorff 1998 (Gleichung (3.2)) wird die Porenzahl zur Charakterisierung der Stoffeigenschaften verwendet. Die Schüttguteigenschaften ändern sich bei kleinen Änderungen der Porenzahl erheblich. Die folgenden Darstellungen der Porenzahlen im Silo lassen Bereiche von Auflockerung und Verdichtung erkennen. Nach dem Füllen des Silos mit dem Stoffmodell nach Kolymbas 1989 wird die Anfangsporenzahl für das Entleeren mit dem Stoffmodell nach von Wolffersdorff 1996 in jedem Finiten-Element aus dem Spannungszustand mit der Gleichung (3.11) berechnet.

In den Kernflusssilos mit der Trichterneigung $\Theta = 60^\circ$ und $\Theta = 90^\circ$ treten am Übergang zur toten Zone Scherbereiche auf (siehe Bild 1.2). Bei der Scherverformung von Schüttgut tritt eine Volumenzunahme auf, diese Dilatanz bewirkt eine Vergrößerung der Porenzahl (Bilder 6.19 und 6.20). Somit können die Scherzonen

in Kernflusssilos lokalisiert werden.

Das Schüttgut im Massenflusssilo mit der Trichterneigung $\Theta = 15^\circ$ zeigt beim beginnenden Entleeren im Bild 6.18 eine Auflockerung (rot) in unmittelbarer Nähe zur Öffnung, die großen Einfluss auf das Materialverhalten in diesem Bereich hat. Die Auflockerungszone am Auslauf bleibt ab dem Zeitpunkt $t = 0.8\text{s}$ fast unverändert. Dies entspricht der Ausbildung des Geschwindigkeitsfeldes aus Bild 6.14, welches sich rasch ausbildet und fast unverändert bestehen bleibt. Die gewölbe-förmigen Verdichtungszone im oberen Trichterbereich sind in Bild 6.18 ab dem Zeitpunkt $t = 0.6\text{s}$ zu erkennen (weiß-hellblau). Die Entwicklung der Verdichtungszone ist mit der Schwingung der Schüttgutsäule (Bild 6.12) und mit dem konvergenten (verengten) Fluss im Trichter in Verbindung zu bringen.

Die Entwicklung der Porenzahl beim Entleeren im Kernflusssilo mit der Trichterneigung $\Theta = 60^\circ$ ist in Bild 6.19 durch eine rasche Ausbildung der Auflockerungszone (rot) nahe der Öffnung und durch die Bildung einer Verdichtungszone (weiß) im Trichterbereich sowie der Bildung eines Scherbereichs (dunkelblau) gekennzeichnet. Das auf der toten Zone abgleitende Schüttgut erhält eine horizontale Bewegungskomponente, dies führt zu einer Verdichtung in der Silomittelachse (weiß-hellblau) direkt oberhalb der Auflockerungszone des Öffnungsbereiches. Die Form der Verdichtungszone im Trichter deutet auf eine zu geringe innere Reibung im Schüttgutmodell hin (vergleiche Kapitel 6.6).

Beim Kernflusssilo mit der Trichterneigung $\Theta = 90^\circ$ in Bild 6.20 bildet sich die Auflockerungszone im Öffnungsbereich langsamer als bei den anderen untersuchten Silogeometrien. Zur größten Auflockerung (rot) kommt es in dem Finiten-Element, welches die Scherverformungen am Rand der Öffnung übernimmt. Am Boden des Silos neben der Öffnung bildet sich eine Verdichtungszone (weiß). Ein Vergleich mit dem Geschwindigkeitsfeld aus Bild 6.17 zeigt eine gute Übereinstimmung der Bereiche unbewegten Schüttgutes. Die Scherzone (dunkelblau) zwischen toter Zone und bewegter Schüttgutmasse ist zum Zeitpunkt $t = 1.0\text{s}$ im Ansatz zu erkennen.

6.10 Deviatorischer Anteil der Deformationsrate

Die Scheranteile der Deformationsrate D_{xy} sind in Bild 6.21 für die drei untersuchten Geometrien $\Theta = 15^\circ$, $\Theta = 60^\circ$ und $\Theta = 90^\circ$ zum Zeitpunkt $t = 0.7\text{s}$ dargestellt. Die Wandreibung lässt beim Massenflusssilo den unteren Trichterbereich

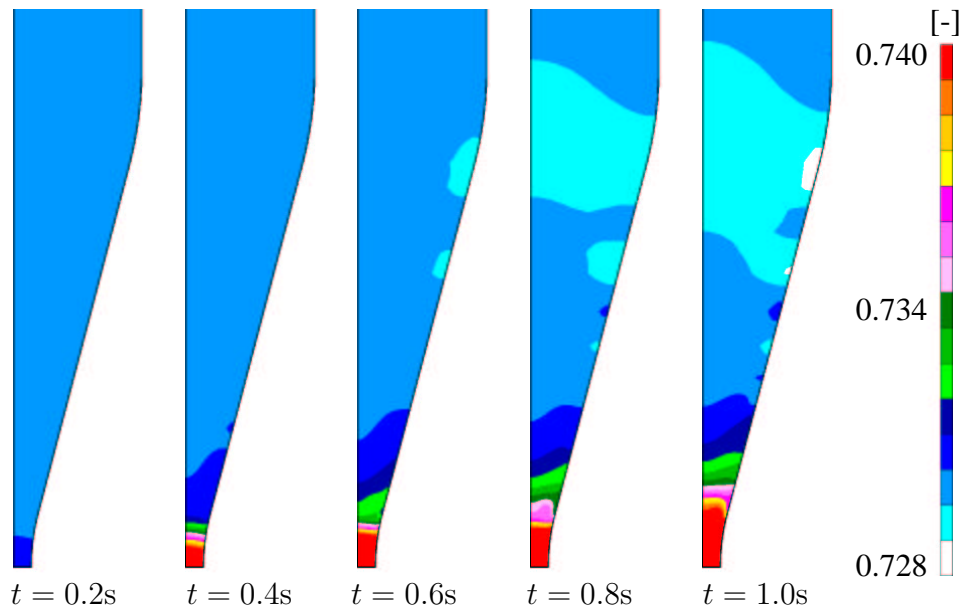


Bild 6.18: Entwicklung Porenzahl im Schüttgut beim Entleeren: Massenflusssilo mit der Trichterneigung $\Theta = 15^\circ$ (Trichterbereich bis zum Übergang in den Schaft dargestellt)

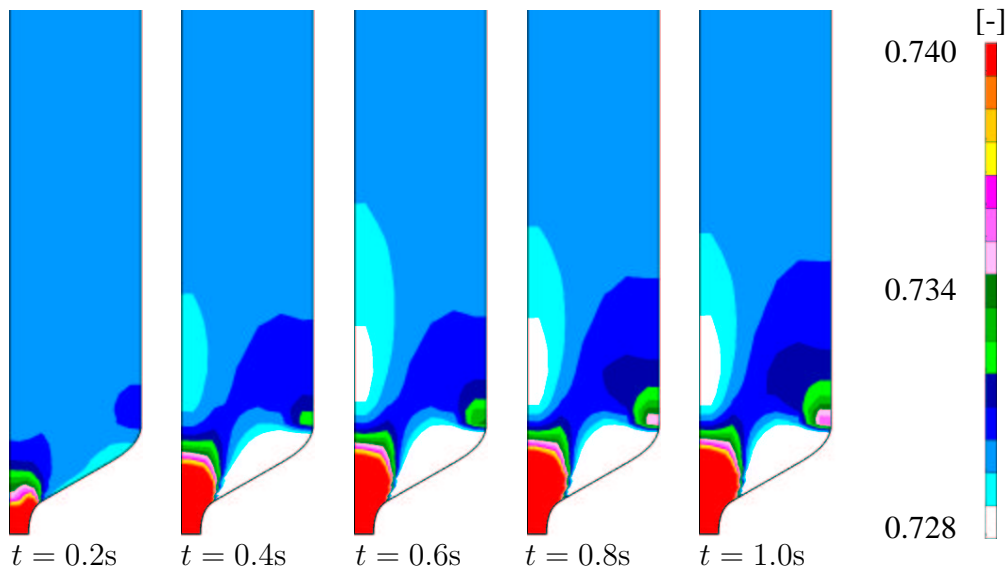


Bild 6.19: Entwicklung der Porenzahl im Schüttgut beim Entleeren: Kernflusssilo mit der Trichterneigung $\Theta = 60^\circ$ (untere Hälfte dargestellt)

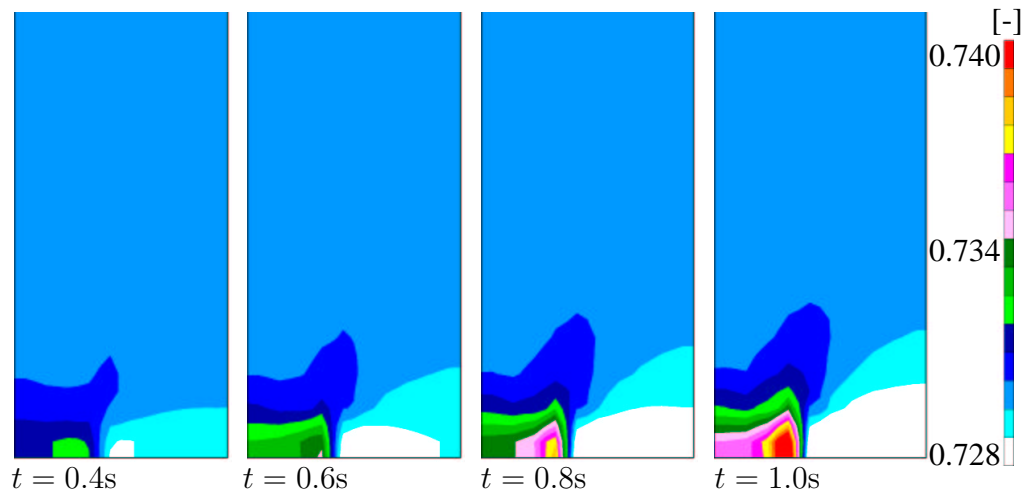


Bild 6.20: Entwicklung der Porenzahl im Schüttgut beim Entleeren: Kernflusssilo mit der Trichterneigung $\Theta = 90^\circ$

in Bild 6.21 rot erscheinen. Weitere Scherdeformationsraten treten an den Auflagern der elastischen Silowand auf (gelb und grün). Hier werden dem Schüttgut durch die auftretenden Wandverformungen zusätzliche horizontale (verengende) Bewegungsanteile aufgezwungen.

Der Kernflusssilo mit der Trichterneigung $\Theta = 60^\circ$ zeigt die Scherrate an der Wand im Schaftbereich grün und im Bereich der toten Zone im Trichter in den Farben rot bis violett. Hier treten also die größten Scherraten am Übergang von bewegter Schüttgutmasse und auf dem Trichter auflagernder, nicht bewegter Schüttgutmasse auf. Dies spiegelt sich in den Ergebnissen aus Bild 6.19 wieder, da sich die Porenzahl in diesem Bereich in Folge der Dilatanz vergrößert.

Beim Kernflusssilo mit der Trichterneigung $\Theta = 90^\circ$ ist die Scherbereich an der Auslassöffnung mit besonders hoher Scherrate in roter Farbe deutlich zu erkennen. Der Scherbereich ist fast senkrecht flammenförmig nach oben ausgedehnt (rote Farbe abnehmend bis hellblau) und trennt den Bereich hoher Schüttgutgeschwindigkeit an der Silomittelachse vom Bereich niedriger Schüttgutgeschwindigkeit an der Silowand (vergleiche Schüttgutgeschwindigkeit in Bild 6.17).

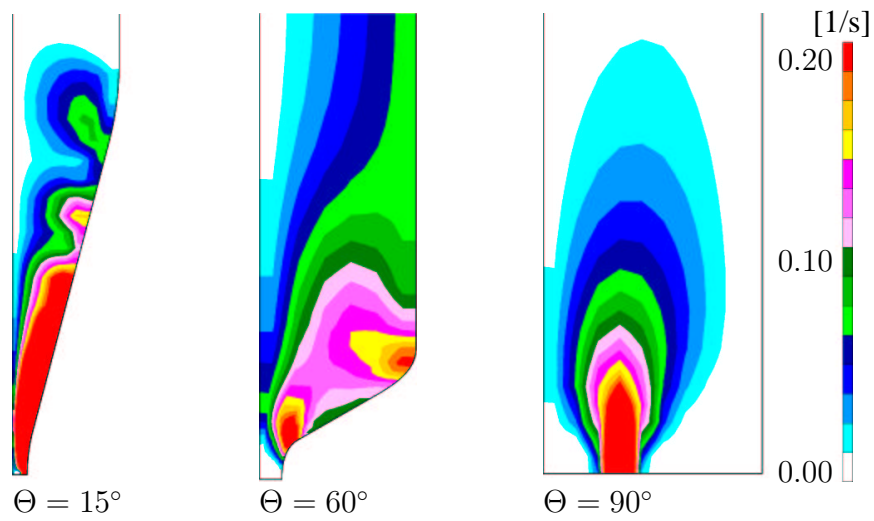


Bild 6.21: Scheranteil der Deformationsrate zum Zeitpunkt $t = 0.7\text{s}$: Massenfluss und Kernfluss, für verschiedene Trichterneigungen Θ (jeweils der untere Teil des Silos dargestellt)

7 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Mit dem Programm SILO können Entleerungsvorgänge von Silos über Zeiträume von mehreren Sekunden simuliert werden. Das neu implementierte hypoplastische Stoffmodell für Schüttgut nach Gudehus und von Wolffersdorff von 1996 zeigt eine gute Konvergenz. Mit der dynamischen Erweiterung (Kapitel 3.6) des hypoplastischen Stoffmodells können lange Entleerungszeiten untersucht und hohe Entleerungsgeschwindigkeiten erreicht werden.

Als Ergebnis der Simulation kann die Geschwindigkeit, die Porenzahl, die Spannung, die Deformationsrate und die Wandverformung dargestellt werden. Im Gegensatz zum Experiment werden alle Werte im gesamten Silo und zu jedem Zeitpunkt ausgegeben. Bereiche großer Scherverformungen werden lokalisiert und mit Hilfe der Porenzahl kann in den Scherzonen das dilatante Verhalten von Schüttgütern abgebildet werden. Zonen der Bewegung und der Ruhe werden dargestellt: Es können somit Kern- und Massenflusssilos berechnet und vorhergesagt werden. Die Änderung des Spannungszustandes beim beginnenden Entleeren und der daraus resultierende hochlaufende Switch werden erstmals im Experiment und in der Simulation belegt (Kapitel 6.5).

Die Entleerungsberechnung des Massenflusssilos (Kapitel 6.7) zeigt die Schwingung der Schüttgutsäule im Siloschaft, die die erste Eigenfrequenz des Silos anregen kann. Dies kann eine Ursache des Siloschlagens sein. Es fehlen noch experimentelle Daten, die diesen Effekt darstellen können, denn es muss die Geschwindigkeit im Siloschaft und im Trichter gleichzeitig aufgenommen werden. Hierzu ist die derzeitige Messtechnik nicht in der Lage. Für die Darstellung des dynamischen Effektes des Siloschlagens in der Simulation muss die Lagerung des Silos berücksichtigt werden. Die Silokonstruktion muss an die Umgebung gekoppelt werden. Die Interaktion von Silo und Baugrund bzw. Fundament stellt eine notwendige Bedingung für die realistische Simulation der Schwingungen des Silos dar.

Die simulierten Schwingungen der Silowände (Kapitel 6.7) können die umgebende Luft zu Schwingungen anregen. Falls die Wandschwingungen im hörba-

ren Frequenzbereich liegen und die abgegebene Energie ausreichend ist, kann hieraus das sogenannte Silobrummen entstehen. Es könnten jedoch sowohl *stick-slip-Effekte* zwischen Wand und Schüttgut als auch intergranulare *stick-slip-Effekte* für das Auftreten von Silobrummen verantwortlich sein. Messungen am Silo und an Stoffproben müssen durchgeführt werden, damit ein Modell und eine numerische Beschreibung für die intergranularen Effekte gefunden werden können. Die verwendeten Schüttgüter zeigen in den Versuchssilos kein Anzeichen von Silobrummen.

A NOMENKLATUR UND MATRIXSCHREIBWEISE

A.1 Symbole und Einheiten

Symbol	Einheit	Beschreibung
\mathbf{T}	$[kPa]$	CAUCHYsche Spannungstensor
$\dot{\mathbf{T}}$	$[kPa/s]$	Spannungsratentensor
$\dot{\mathbf{T}}^*$	$[kPa/s]$	JAUMANNsche Spannungsratentensor
\mathbf{D}	$[1/s]$	Deformationsratentensor
$\dot{\mathbf{D}}$	$[1/s]$	JAUMANNscher Deformationsratentensor
$\dot{\mathbf{D}}$	$[1/s]$	zeitliche Ableitung der Deformationsrate
\mathbf{D}'	$[1/s]$	Deviator der Deformationsrate $\mathbf{D}' = \mathbf{D} - \frac{1}{3}tr(\mathbf{D})\mathbf{1}$
\mathbf{L}	$[1/s]$	Geschwindigkeitsgradiententensor
\mathbf{W}	$[1/s]$	Rotationsratentensor
\mathcal{G}	$[kPa]$	viskoser Stofftensor (ratenabhängig)
\mathcal{H}	$[kPa]$	elastischer Stofftensor (ratenunabhängig)
ρ	$[kN/m^3]$	spezifische Masse des Schüttgutes
\mathbf{v}	$[m/s]$	Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{v}_k(t)$	$[m/s]$	Geschwindigkeitsvektor der räumlich festen Elementknoten
v_n	$[m/s]$	Geschwindigkeit normal zum Rand Γ
\mathbf{g}	$[m/s^2]$	Erdbeschleunigung $9.81 m/s^2$
$\mathbf{a}_{\text{öff}}$	$[m/s^2]$	Beschleunigung beim Öffnen des Silos
\mathbf{b}	$[kN]$	Volumenkräfte der Erdbeschleunigung
φ	$[^\circ]$	Reibungswinkel
$\varphi_p \varphi_e$	$[^\circ]$	Peakreibungswinkel bzw. effektiver Reibungswinkel
φ_c	$[^\circ]$	kritischer Reibungswinkel aus Schüttkegelversuch
φ_w	$[^\circ]$	Wandreibungswinkel
λ	$[-]$	Horizontalspannungsverhältnis
h_s	$[kPa]$	Granulathärte od. Kompressionskennwert
n	$[-]$	Exponent im Stoffmodell (Kornform und -größe)
p_s	$[kPa]$	hydrostatischer Druck ($p_s = tr(\mathbf{T})$)
C_c	$[-]$	Kompressionsbeiwert $C_c = \frac{p_s(1+e)}{K}$

K	$[kPa]$	Kompressionsmodul $K = \frac{1}{3} \frac{h_s}{n} \left(\frac{3p_s}{h_s} \right)^{1-n} \left(\frac{1}{e_i} + 1 \right)$
e	$[-]$	Porenzahl
e_{min}	$[-]$	minimale Porenzahl nach <i>Standardverfahren</i>
e_{max}	$[-]$	maximale Porenzahl nach <i>Standardverfahren</i>
e_p	$[-]$	Porenzahl bei proportionaler Kompression
e_{p0}	$[-]$	Porenzahl bei proportionaler Kompression $p_s \rightarrow 0$
e_d	$[-]$	Porenzahl bei dichtester Lagerung
e_{d0}	$[-]$	Porenzahl bei dichtester Lagerung $p_s \rightarrow 0$
e_i	$[-]$	Porenzahl bei isotroper Kompression
e_{i0}	$[-]$	Porenzahl bei isotroper Kompression $p_s \rightarrow 0$
e_c	$[-]$	Porenzahl im kritischen Zustand
e_{c0}	$[-]$	Porenzahl im kritischen Zustand bei $p_s \rightarrow 0$
r_e	$[-]$	relative Porenzahl $r_e = \frac{e-e_d}{e_c-e_d}$
α	$[-]$	Exponent wirkt auf druckbezogene Lagerungsdichte
β	$[-]$	Exponent wirkt auf skalaren Spannungsmultiplikator
U	$[-]$	Ungleichförmigkeit
d_{50}	$[-]$	mittlerer Korndurchmesser
f_b	$[-]$	druck- und porenzahlabhängiger Faktor
f_d	$[-]$	druck- und porenzahlabhängiger Faktor
f_e	$[-]$	druck- und porenzahlabhängiger Faktor

A.2 Matrizenalgebra

A.2.1 Rechenregeln

Formelzeichen	Indesschreibweise	Beschreibung
$\mathbf{A} : \mathbf{A}$	$A_{ij} A_{ij}$	doppeltes Skalarprodukt
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$	$A_{ij} A_{jk}$	Skalarprodukt (Zeile \cdot Spalte, FALKsches Schema)
$\mathbf{A}\mathbf{A}$	$A_{ij} A_{kl}$	Dyadisches Produkt
$tr(\mathbf{A})$	A_{ii}	Spur des Tensors
$ \mathbf{A} $	$\sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}$	euklidische Norm
\mathcal{A}	A_{ijkl}	Tensor vierter Stufe
∇	∂_i	Nablavektor

A.2.2 Tensorenschreibweise für die FEM

Tensor 2. Stufe \Rightarrow Tensor 1. Stufe

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ & A_{22} & A_{23} \\ sym. & & A_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11} \\ 2A_{12} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ 2A_{23} \\ 2A_{13} \end{bmatrix} = \mathbf{a} \quad (\text{A.1})$$

Gradienten und Tensoren 4. Stufe \Rightarrow Tensor 2. Stufe.

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & v_{1,3} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & v_{2,3} \\ v_{3,1} & v_{3,2} & v_{3,3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{1111} & 2A_{1211} & A_{2211} & A_{3311} & 2A_{2311} & 2A_{1311} \\ A_{1112} & 2A_{1212} & A_{2212} & A_{3312} & 2A_{2312} & 2A_{1312} \\ A_{1122} & 2A_{1222} & A_{2222} & A_{3322} & 2A_{2322} & 2A_{1322} \\ A_{1133} & 2A_{1233} & A_{2233} & A_{3333} & 2A_{2333} & 2A_{1333} \\ A_{1123} & 2A_{1223} & A_{2223} & A_{3323} & 2A_{2323} & 2A_{1323} \\ A_{1113} & 2A_{1213} & A_{2213} & A_{3313} & 2A_{2313} & 2A_{1313} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

A.3 Darstellung des Spannungszustandes

Für die Darstellung des Spannungszustandes kann der Hauptspannungsraum verwendet werden. Bei der Untersuchung des Verhaltens von Schüttgütern werden Fließflächen verwendet, die sich im Allgemeinen kegelförmig vom Koordinatenursprung beginnend in den Druckspannungsbereich ausbreiten (siehe Weidner (1990)). Bringt man diese Kegel in den Schnitt mit der Deviatorebene (oder auch Oktaederebene) wird die Fließgrenzfläche des Materials für ein bestimmtes hydrostatisches Druckspannungsniveau sichtbar (Bild 3.1). In Bild A.1 ist die Deviatorebene und die Zerlegung des Spannungstensors in einen hydrostatischen Anteil $p = 1/3 \text{tr}(\mathbf{T})$ und einen deviatorischen Anteil $\mathbf{q} = \mathbf{T} - 1/3 \text{tr}(\mathbf{T})\mathbf{I}$ dargestellt (siehe Weidner (1990) und Bauer (1996)). Die Äquisektrix steht senkrecht auf der Deviatorebene.

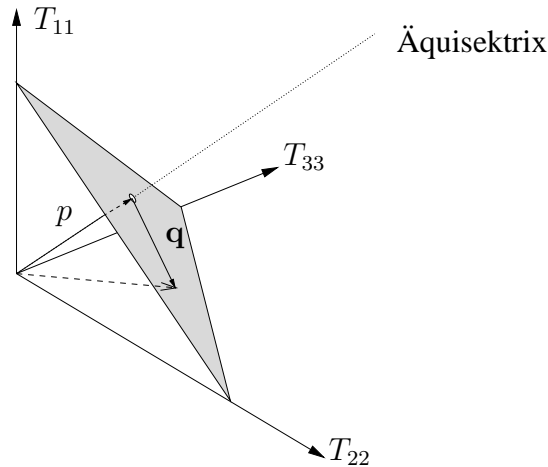


Bild A.1: Darstellung der Spannung in der Deviator- oder Oktaederebene: Hydrostatische Spannung p und deviatorische Spannung \mathbf{q}

LITERATURVERZEICHNIS

Bagnold, R. A. (1954): Experiments on a gravity free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear. Proceedings of Royal Society, London. A 225, 49–63.

Bagnold, R. A. (1973): The physics of blown sand and dessert dunes. Chapman & Hall, London ,1st published 1941.

Bathe, K. J. (1990): Finite-Element-Methoden. Springer Verlag.

Bauer, E. (1992): Zum mechanischen Verhalten granularer Stoffe unter vorwiegend ödometrischer Beanspruchung. Inst. für Boden– und Felsmechanik, Karlsruhe Heft 130, Dissertation.

Bauer, E. (1996): Calibration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials. Soils and Foundations 36(1) , 13–26.

Bazant, Z. P. (1978): Endochronic inelasticity and incremental plasticity. Int. J. Solids Structures. 14, 691–714.

Böhrnsen, J. U.; Antes, H. (1999): Dynamic behaviour of granular materials during the silo discharge process. In: Reliable Flow of Particulate Solids, Volume III, pp. 665–672. Telemark College, N-3914 Porsgrunn, Norway.

Böhrnsen, J. U.; Antes, H. (2001): Handbook of conveying and Handling of Particulate Solids (Handbook of Powder Technology ed), Volume 10, Chapter Silo discharge: Dynamic effects of granular flow, pp. 199–209. Elsevier Science Editor: Levy, A. and Kalman, H.

Böhrnsen, J. U.; Ostendorf, M. (2001): Silo Discharge: Measurement and Simulation of Bulk Solids Dynamic Behaviour. In: 7th Conference Bulk Materials Storage, Handling and Transportation, Volume I, pp. 273–281. Australian Society for Bulk Solids Handling: The University of Newcastle, New South Wales, Australia.

Braun, A. (1997): Schüttgutbeanspruchung von Silozellen unter Erdbebeneinwirkung. Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Karlsruhe, Heft 31.

Chambon, R. (1981): Contribution à la modélisation numérique non linéaire des sols. Université Scientifique et Médicale de Grenoble, France Thèse de Doctorat és Sciences Physiques.

Chambon, R. (1998): Une classe de lois comportement incrementalement non linéaires pour sols non visqueux, resolution de quelques problemes de coherence. C.R. Acad. Sci. Paris. 308, 1571–1576 Serie II.

Chambon, R.; Renoud-Lias, B. (1979): Incremental non-linear stress-strain relationship for soil and integration by FEM In: Wittke, W. (Ed.), 3rd Int. Conf. on Numer. Methods in Geomech., pp. 1309–1332.

Cundall, P. A.; Strack, O. D. L. (1979): A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique* 29(1) , 47–65.

Dahlhaus, F. (1995): Stochastische Untersuchungen von Silobeanspruchungen. Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Karlsruhe, Heft 25 Dissertation.

Darv, F.; Dendai, H.; Chau, B. (1982): Different classes of constitutiv equations and their characteristics In: Saada, A., Bianchini, G., and Balkema, G. (Eds.), Int. Workshop on Constitutiv Equatations for granular non-cohesiv soils, pp. 11–18.

Darv, F.; Labanieh, S. (1982): Incremental constitutiv law for sands and clays. Int. J. Num. and Anal. Methods in Geomech.. 6, 243–275.

Darve, F. (1974): Contribution à la détermination de la loi rhéologues incrémentale des sols. Université Scientifique et Médicale de Grenoble, France Thèse de docteur-ingénieur.

Dinkler, D.; Ahrens, H. (1994): Finite-Element-Methode Teil I/II. Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig.

Feise, H. J. (1996): Modellierung des mechanischen Verhaltens von Schüttgütern Braunschweiger Schriften zur Mechanik Bd.23. Mechanik-Zentrum, Techn. Universität Braunschweig.

Gladen, W. (1985): Numerische Untersuchung der Lasten in Silozellen beim exzentrischen Entleeren. Karlsruhe Dissertation.

Gudehus, G. (1979): A comparison of some constitutiv laws for soils under radially symmetric loading and unloading In: Wittke, W. (Ed.), 3rd. Conf. on Numer. Methods in Geomechanics, Aachen, pp. 1309–1323.

- Gudehus, G.** (1996): A comprehensive constitutive equation for granular materials. *Soils and Foundations* 36(1) , 1–12.
- Haff, P. K.** (1983): Grain flow as a fluid–mechanical phenomenon. *Journal of Fluid Mechanics*. 134, 401–430.
- Hardow, B.** (1998): Spannungsschwankungen im Schüttgut beim Entleeren eines Silos. *Inst. f. Mech. Verfahrenstechnik, TU Braunschweig Dissertation*.
- Häußler, U.** (1984): Geschwindigkeits- und Spannungsfelder beim Entleeren von Silozellen. *Karlsruhe Dissertation*.
- Herle, I.** (1997): Hypoplastizität und Granulometrie einfacher Korngerüste. *Institut für Boden– und Felsmechanik, Karlsruhe, Heft 142 Dissertation*.
- Herrmann, H. J.; Luding, S.** (1998): Modelling granular media on the computer. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 10, 189–231.
- Hoppe, H.** (1979): Experimentelle Darstellung der Spannungsverteilung in Bunkern und Silos in Abhängigkeit vom Fließbild der Anlage. *Fakultät für Bergbau, Hüttenwesen und Maschinenwesen, Technische Universität Clausthal Dissertation*.
- Hügel, H.** (1995): Prognose von Bodenverformungen. *Institut für Boden– und Felsmechanik, Karlsruhe, Heft 136*.
- Hutter, K.; Rajagopal, K. R.** (1994): On flows of granular materials. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 6, 81–139.
- Hwang, H.** (1994): Ein neues kinetisches Modell für rasche Granulatströmung. *Fachbereich Mechanik, Technische Hochschule Darmstadt Dissertation*.
- Janssen, H. G.** (1895): Versuche über Getreidedruck in Silozellen. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*. 39, 1045–1049.
- Jenike, A. W.** (1964): Storage and Flow of Solids. *Bulletin 123 of the Utah Engineering Experiment Station*. 53, 26 *Bulletin of the University of Utah*.
- Jofriet, J. C.** (1997): A numerical Model for Flow of Granular Materials in Silos. *J. agric. Engng. Res.*. 68, 223–236 Part I:Model Development ;Part II:Model Validation.

Kahl, J. (1976): Grundlagen über die Belastung von Siloeinbauten bei ruhenden und fließenden Schüttgütern. Fakultät für Bergbau, Hüttenwesen und Maschinenwesen, Technische Universität Clausthal Dissertation.

Kaldenhoff, M. (1998): Simulation von grobgranularen Schüttgütern mit Hilfe Zellulärer Automaten. Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig Dissertation.

Kolymbas, D. (1977): A rate-dependent constitutive equation for soils. Mech. Res. Comm.. 6, 367–372.

Kolymbas, D. (1981): Bifurcation analysis for sand sample with non-linear constitutive equation for soils. Ing. Arch.. 50, 131–140.

Kolymbas, D. (1988): Eine konstitutive Theorie für Böden und andere körnige Stoffe. Institut für Boden- und Felsmechanik, Karlsruhe, Heft 109.

Kolymbas, D. (1999): Introduction to Hypoplasticity. Institute of Geotechnics and Tunnelling, University of Innsbruck under preparation.

Kolymbas, D. (2000): Introduction to Hypoplasticity. A. A. Balkema, Rotterdam, Netherlands ISBN 90-5809-306-9.

Kozicki, J.; Tejchman, J. (2001): Simulations of Granular Flow in Silos with a Cellular Automata Model. Powder handling & processing 13(3), 267–273.

Lehmann, L. (1996): Numerische Simulation der Spannungs- und Geschwindigkeitsfelder in Silos mit Einbauten Braunschweiger Schriften zur Mechanik Bd.25. Mechanik-Zentrum, Techn. Universität Braunschweig.

Lehmann, L.; Antes, H. (1993): On the effect of inserts on the silo discharge process. In: Reliable Flow of Particulate Solids II Oslo.

Lo, S. C. R.; Lee, I. K. (1990): Response of a granular soil along constant stress increment ratio path. ASCE, Geotech. Eng.. 116, 355–376.

Lyle, C. (1991): Spannungen in Silos mit starren, koaxialen Einbauten. Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig Dissertation.

Massoudi, M.; Ahmadi, G. (1994): Rapid flow of granular materials with density and fluctuation energy gradients. Int. Journal Non-Linear Mechanics 29(4), 487–492.

Mühlhaus, H. B. (1987): Berücksichtigung von Inhomogenitäten im Gebirge im Rahmen einer Kontinuumsmechanik. Institut für Boden- und Felsmechanik, Karlsruhe, Heft 106.

Ostendorf, M.; Theuerkauf, J.; Schwedes, J. (2000): Measurement of the dynamic behaviour in discharging silos using optical flow analysis In: H. Kalman, A. Levy, M. H. (Ed.), *Conveying and Handling of Particulate Solids*, Volume II, pp. 15.41–15.46. The 3rd Israeli Conference for Conveying and Handling of Particulate Solids.

Rombach, G. A. (1991): Schüttguteinwirkungen auf Silozellen -Exzentrische Entleerung-. Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Karlsruhe, Heft 14.

Ruckebusch, C. (1995): Statische und dynamische Phänomene bei der Entleerung von Silozellen. Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Karlsruhe, Heft 26.

Rudnicki, J. W.; Rice, J. R. (1975): Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*. 23, 371–394.

Savage, S. B.; Sayed, M. (1984): Stresses developed by dry cohesionless granular materials sheared in an annular shear cell. *Journal of Fluid Mechanics*. 142, 391–430.

Schanz, M. (1998): Allgemeine numerische Methoden. Institut für Angewandte Mechanik, Technische Universität Braunschweig Skriptum zur Vorlesung.

Schwedes, J. (1968): Fließverhalten von Schüttgütern in Bunkern. Verlag Chemie GmbH.

Schwedes, J.; Schulze, D.; Kwade, A.; Heinrich, H. (1998): 16. Hochschulkurs: Lagern und Fließen von Schüttgütern. Institut für Mechanische Verfahrenstechnik, Technische Universität Braunschweig.

Stadler, R.; Buggisch, H. (1985, August) Influence of Deformation Rate on Shear Stresses in Bulk Solids - Theoretical Aspects and Experimental Results. In: EFCE Publication Series No.49, *Reliable Flow of Particulate Solids*, Bergen (Norway).

Strusch, J. (1996): Wandnormalspannungen in einem Silo mit Einbau und Kräfte auf Einbauten. Shaker Verlag, Aachen Dissertation.

Svendsen, B.; Hutter, K.; Laloui, L. (1999): Constitutive models for granular materials including quasi-static frictional behaviour: Toward a thermodynamic theory of plasticity. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 4, 263–275.

Tejchman, J. (1989): Scherzonenbildung und Verspannungseffekte in Granulaten unter Berücksichtigung von Korndrehungen. Institut für Boden- und Felsmechanik, Karlsruhe, Heft 117.

Tejchman, J. (1994): Dynamical Phenomena in Silos during Discharge. *Archives of Civil Engineering I(XI)* , 75–88.

Tejchman, J. (1997): Modelling of shear localisation and autogeneous dynamic effects in granular bodies. Institut für Boden- und Felsmechanik, Karlsruhe, Heft 140 Habilitation.

Truesdell, C. (1955): Hypo-elasticity. *J. Rational Mech. Anal.* 4, 83–133.

Truesdell, C.; Noll, W. (1992): The non-linear field theories of mechanics (Handbuch der Physik III/c ed):. Springer Verlag, Berlin.

Valanis, K. C. (1971): A theory of viscoplasticity without a yield surface, Part I: General theory; Part II: Application to mechanical behavior of metals. *Archivum Mech. Stosowanjew*. 23, 517–533.

von Wolffersdorff, P. A. (1996): A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*. 1, 251–271.

Weidner, J. (1990): Vergleich von Stoffgesetzen granularer Schüttgüter zur Silodruckermittlung. Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Karlsruhe, Heft 10 Dissertation.

Wu, W. (1992): Hypoplastizität als mathematisches Modell zum mechanischen Verhalten granularer Stoffe. Institut für Boden- und Felsmechanik, Karlsruhe, Heft 129.

Zetzener, H. (2000): Influence of the Stress History on the Time Dependent Behaviour of Bulk Solids In: H. Kalman, A. Levy, M. H. (Ed.), *Conveying and Handling of Particulate Solids*, Volume I, pp. 3.87–3.92. The 3rd Israeli Conference for Conveying and Handling of Particulate Solids.

Zienkiewicz, O. C. (1984): Methode der finiten Elemente. Carl Hanser Verlag, München.

INDEX

- Argotropie, 16
- Auslassgeschwindigkeit, 59, 60, 68
- Barotropie, 15
- Berechnungsprogramm SILO, 7, 9, 26, 47, 55, 63
- Bewegungsgleichung, 12
- Bezugssystem, 9, 17, 40
 - EULER, 10, 51
 - LAGRANGE, 11
- COSSERAT-Drehung, 8, 22
- Dämpfungsmatrix, 53
- Deformationsratentensor, 13, 24, 90
- Deviator, 24
 - Deformationsrate, 42, 84, 90
 - Dehnungsrate, 20
 - Ebene, 25, 93
 - Spannung, 25, 39
 - Spannungsrate, 20
- Dilatanz, 15, 26, 83
- Drehgeschwindigkeitstensor, 14
- dynamische Stoffparameter, *siehe* Stoffmodell
- Eigenfrequenz, 63, 77, 88
- einfache Korngerüste, 17
- Einphasigkeit, 18
- Elemente, *siehe* isoparametrische Finite-Elemente
- Endochrone Theorie, 20
- EULERSche Bezugssystem, *siehe* Bezugssystem, EULER
- Experimentalsilo, 44, 63
- FEM, 7–9, 26, 41, 47, **50**, 63, 64, 70–79
- Geschwindigkeitsgradient, 13, 24, 48, 49, 90
- Granulathärte, 27, 29–31, 38, 39, 90
- Hauptspannungstrajektor, 2
- Hochgeschwindigkeitskamera, 45
- Hyperelastizität, 19
- Hyperplastizität, 21
- Hypoelastizität, 19
- Hypoplastizität, 21
- Implizites EULER Zeitschrittverfahren, 52
- IMVT, 28, 31, 44, 57, 63
- inkrementelles Füllen, 65
- Integrale Darstellung, 48
- Integrität, 17
- isoparametrische Finite-Elemente, 54, 61
- JAUMANNsche Spannungsrate, 14, 21, 23, 40, 90
- JENICKE-Scherzelle, 28, 38
- kinematische Beziehungen, 13
- Kontinuität, 18
- Kontinuitätsgleichung, 13
- Kontinuummodell, 7, 17
- Koordinateninvarianz, 17
- Kornumlagerungen, 4, 17, 18
- Lokalität, 18
- Massenerhaltung, 54
- Massenmatrix
 - konsistente, 52
 - konvektive, 52, 53
- Materielle Objektivität, 17

- Modellsilo, 44
- Newton-Raphson-Verfahren*, 53
- NEWTONsche Flüssigkeit, 41
- nicht-NEWTONsche Flüssigkeit, 41
- Nicht-Polarität, 18
- numerische Umsetzung, 9, 47, *siehe*
Berechnungsprogramm
- Ödometer, 8, 30, 37, 38
- Oktaederebene, *siehe* Deviator, Ebene
- Particel-Image-Velocimetry, 74
- Plastizität, 16
- Plastizitätstheorie, 20
- Porenzahl, 18, 22–39, 65, 67, 77, 83–90
- Programm, *siehe* Berechnungsprogramm
- Pyknotropie, 15
- Randbedingung, 6, 17, 48, 57, 58
- Reibungswinkel
effektiver, 28, 36, 38, 90
kritischer, 27, 36, 38, 90
peak, 28, 35, 36, 90
Wand, 29, 90
- Ringschergerät, 28, 38
- Rotationsmatrix, 51
- Rotationsratentensor, 49, 90
- Scherbereich, 2, 22, 84, 86
- schichtweises Füllen, 65
- SIGMOID-Funktion, 59, 60
- Silobrummen, 1, 89
- Siloschlagen, 1, 63, 64, 77, 88
- singing dunes, 4
- Spannungsdeviator, *siehe* Deviator, Spannung
- Spannungstensor, 12, 14, 18, 21, 23, 24, 40, 41, 49, 90
- Steifigkeitsmatrix, 19, 53, 55
- stick-slip-Effekt, 64, 89
- Stoffmodell, **15**, 19
dynamische Parameter, 37
elastisch, 19, 61
elasto-plastisch, 7
Fluidbeschreibung, 41
hyperplastisch, 21
hypoelastisch, 19
hypoplastisch, 7–9, **21**, 27, 41, 47, 52, 63, 65, 67, 77, 83, 88
im Kontinuum, 10, 14, 15, 17
Partikelmodell, 15
plastisch, 20
Stoffparameter, 37
visko-plastisch, 40
viskoser Zusatzterm, **37**
vom Ratentyp, 13
- Stoffparameter, *siehe* Stoffmodell
- Stofftensor
elastisch, 19, 90
viskos, 40, 90
- Stress Vertex*-Theory, 21
- Switch, 2, 9, 63, 70, 74, 88
- tote Zone, 81, 83
- Triaxialversuch, 8, 24, 31, 35, 37
- Verzerrungsmatrix, 51
- Viskosität, 39–41, 43, 67–69
- Viskositätsparameter μ , 43
- Wandimperfectionen, 64
- zelluläre Automaten, 5
- Zweiaxialbox, 6, 28, 30, 31, 38

Braunschweiger Schriften zur Mechanik — BSM

Bisher erschienene Berichte in dieser Reihe

- 1–1990 Plonski, T.:
Dynamische Analyse von schnelldrehenden Kreiszylinderschalen
- 2–1991 Wegener, K.:
Zur Berechnung großer plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Überspannungstyp
- 3–1991 Gröhlich, H.:
Finite-Element-Formulierung für vereinheitlichte inelastische Werkstoffmodelle ohne explizite Fließflächenformulierung
- 4–1992 Hesselbarth, H.:
Simulation von Versetzungsstrukturbildung, Rekristallisation und Kriechschädigung mit dem Prinzip der zellulären Automaten
- 5–1992 Schlums, H.:
Ein stochastisches Werkstoffmodell zur Beschreibung von Kriechen und zyklischem Verhalten metallischer Werkstoffe
- 6–1992 Kublik, F.:
Vergleich zweier Werkstoffmodelle bei ein- und mehrachsigen Versuchsführungen im Hochtemperaturbereich
- 7–1992 Bechtloff, J.:
Interpolationsverfahren höheren Grades für Robotersteuerungen
- 8–1993 Müller, M.:
Dreidimensionale elastodynamische Analyse von Tanks mit fluidbenetzten Einbauten
- 9–1993 Senker, P.:
Stabilitätsanalyse elastischer Rotorsysteme
- 10–1993 Cheng, W.:
Schallabstrahlung einer schwingenden Reissner/Mindlin Platte

- 11–1993 Wiebe, T.:
Wellenausbreitung in poroelastischen Medien: Untersuchung mit Randintegralgleichungen
- 12–1993 Hahne, M.:
Beschreibung der plastischen Längsdehnung bei Torsion mit einem makroskopischen Stoffgesetz
- 13–1993 Heisig, G.:
Zum statischen und dynamischen Verhalten von Tiefbohrsträngen in räumlich gekrümmten Bohrlöchern
- 14–1994 Araújo, F. C.:
Zeitbereichslösung linearer dreidimensionaler Probleme der Elastodynamik mit einer gekoppelten BE/FE–Methode
- 15–1994 Kristen, M.:
Untersuchung zur elektrischen Ansteuerung von Formgedächtnis-Antrieben in der Handhabungstechnik
- 16–1994 Latz, K.:
Dynamische Interaktion von Flüssigkeitsbehältern
- 17–1994 Jäger, M.:
Entwicklung eines effizienten Randelementverfahrens für bewegte Schallquellen
- 18–1994 August, M.:
Schwingungen und Stabilität eines elastischen Rades, das auf einer nachgiebigen Schiene rollt
- 19–1994 Erbe, M.:
Zur Simulation des Rißwachstums in dreidimensionalen, elastisch-plastischen Strukturen mit der Methode der Finiten Elemente
- 20–1995 Gerdes, R.:
Ein stochastisches Werkstoffmodell für das inelastische Materialverhalten metallischer Werkstoffe im Hoch- und Tieftemperaturbereich
- 21–1995 Tröndle, G.:
Effiziente Schallberechnung mit einem adaptiven Mehrgitterverfahren für die 3-D Randelementmethode
- 22–1996 Degenhardt, R.:
Nichtlineare dynamische Bauwerksprobleme und Interaktion mit dem Baugrund

- 23–1996 Feise, H.J.:
Modellierung des mechanischen Verhaltens von Schüttgütern
- 24–1996 Haubrok, D.:
Reibungsfreie Kontaktprobleme der 2D-Elastostatik und -dynamik als Optimierungsaufgabe mit REM
- 25–1996 Lehmann, L.:
Numerische Simulation der Spannungs- und Geschwindigkeitsfelder in Silos mit Einbauten
- 26–1996 Klein, R.:
Dynamische Interaktion von dünnwandigen Tragwerken und Boden mit Abschirmschlitzten
- 27–1996 Kopp, T.:
Simulation großer inelastischer Deformationen bei Torsionsversuchen
- 28–1997 Harder, J.:
Simulation lokaler Fließvorgänge in Polykristallen
- 29–1997 Lewerenz, M.:
Zur numerischen Behandlung von Werkstoffmodellen für zeitabhängig plastisches Materialverhalten
- 30–1997 Meywerk, M.:
Stabilität und Verschleiß bei auf Schienen laufenden Eisenbahnradsätzen
- 31–1997 Plagge, F.:
Nichtlineares, inelastisches Verhalten von Spiralseilen
- 32–1997 Neubert, M.:
Richtungsregelung beim Tiefbohren
- 33–1998 Sangi, D.:
Die Versetzungsstrukturbildung in Metallen
- 34–1998 Thielecke, F.:
Parameteridentifizierung von Simulationsmodellen für das viskoplastische Verhalten von Metallen - Theorie, Numerik, Anwendung
- 35–1998 Vietgen, J.:
Numerische Simulation duktilen Rißwachstums mit Berücksichtigung von Schädigung
- 36–1998 Lär, B.:
Einfluß transientser Anregungen auf die Zylinderkopf-Akustik

- 37–1998 Scheld, C.:
Auswirkungen dynamischer Interaktionen auf das Schwingungsverhalten von Tanks
- 38–1999 Baaran, J.:
Schallfeldanalyse bei sich bewegenden schallerzeugenden Körpern
- 39–1999 Daros, C.H.:
Wave propagation in unbounded piezoelectric media of transversely isotropic symmetry
- 40–2000 Wagner, N.:
Untersuchung der Boden-Fahrzeug-Interaktion mit gekoppelten Rand- und Finite-Element-Methoden
- 41–2001 Langer, S.:
Schalltransmission durch Isolierverglasung
- 42–2001 Schacht, T.:
Orientierungsabhängige Rissbildung in duktilen Metallen
- 43–2002 Ackermann, L.:
Simulation der Schalltransmission durch Wände
- 44–2002 Barthold, F.-J.:
Zur Kontinuumsmechanik inverser Geometrie Probleme
- 45–2002 Böhrnsen, J.-U.:
Dynamisches Verhalten von Schüttgütern beim Entleeren aus Silos
- 46–2002 Zorn, C.:
Plastisch instabile Verformung aufgrund dynamischer Reckalterung und korrelierten Versetzungsgleitens